Universidad del Rosario
La Simulación al Servicio de la Academia
Facultad de Administración
Laboratorio Modelamiento y Simulacion
Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

Descripción general de la Inferencia Bayesiana y sus aplicaciones en los procesos de gestión

Lesley Ofelia Mesa Páez[1]
Tica26@gmail.com
Miller Rivera Lozano[2]
miller.rivera@urosario.edu.co
Jesús Andrés Romero Davila[3]
jesusromerodavila@yahoo.es

Resumen

Dentro de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es válido enunciar el Teorema de Bayes como expresión de probabilidad condicional que demuestra los beneficios obtenidos en las estimaciones basadas en conocimientos intrínsecos. La metodología bayesiana específica un modelo de probabilidad que contiene algún tipo conocimiento previo acerca de un parámetro investigativo, de este modo se acondiciona al modelo de probabilidad para realizar el ajuste de los supuestos.

La presente publicación considera la toma de decisiones como una función basada en el ejercicio del análisis de hechos concretos y en la capacidad de de las redes bayesianas como modelo probabilístico que relaciona las variables aleatorias mediante un grafo dirigido.

Adicionalmente se expone la importancia que tienen los modelos bayesianos y su relación con los procesos de toma de decisiones, el cual es fundamental para el desarrollo de aplicaciones empresariales en proporción de los costos reales y las oportunidades en que las decisiones a menudo deben hacerse en condiciones de incertidumbre.

Introducción

La aparición de la inferencia bayesiana dio inicio a una revolución estadística que involucra el resurgimiento de la teoría bayesiana. Es así como el uso de la metodología bayesiana es de progresivo interés, y aceptación en distintas áreas,

[1] Ingeniero de Sistemas Universidad Libre.
[2] Ingeniero de Sistemas. Especialista en Ingeniería de Software. Especialista en Auditoria de Sistemas. Magister en Administración de Empresas. Coordinador Laboratorio de Modelamiento y Simulación Empresarial. Universidad del Rosario
[3] Estudiante estadística matemática de la Universidad Nacional de Colombia

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

son numerosas las aplicaciones que de la estadística bayesiana que se están realizando. Por ejemplo, en el área financiera, la Salud, en el campo ingenieril.

En el campo económico, la inferencia bayesiana comienza a tomar un lugar significativo con respecto al modelamiento de expectativas socio-económicas que incorpora decisiones y hechos modificables para un proceso de análisis. En este aspecto, el presente documento está ilustrado con ejemplos de aplicación práctica con elementos bayesianos.

Los métodos bayesianos se han generalizado particularmente por que es útil para la solución de problemas en la toma de decisiones. La utilidad de estos métodos consiste básicamente en el uso de situaciones en las que existe información limitada acerca de un gran número de variables o cuando la información proviene de diferentes fuentes.

Los modelos bayesianos primordialmente incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro de un espacio muestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística.

La estadística bayesiana provee cantidades tanto conocidas como desconocidas lo que permite incorporar los datos conocidos dentro de la estimación de los parámetros dados inicialmente, logrando así un proceso de estimación más rico en información haciendo inferencias sobre las cantidades desconocidas.

Todos los modelos bayesianos tienen en común la asignación de la probabilidad como medida de creencia de una hipótesis, así es que, la inferencia es un proceso de reajuste de medidas de creencia al conocerse nuevos axiomas.

1. Conceptos Bayesianos

Las diferentes metodologías de inferencia se pueden ver como un conjunto de fórmulas que resultan aplicables en determinados casos y bajo ciertas condiciones. La *metodología bayesiana* está basada en la interpretación subjetiva de la probabilidad y tiene como punto central el Teorema de Bayes.

Dentro de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es válido enunciar el Teorema de Bayes como expresión de probabilidad condicional que demuestra los beneficios obtenidos en las estimaciones basadas en conocimientos intrínsecos. La metodología bayesiana específica un modelo de probabilidad que contiene algún tipo conocimiento previo acerca de un parámetro investigativo, de este modo se acondiciona al modelo de

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

probabilidad para realizar el ajuste de los supuestos.

El fin de la estadística, específicamente de la estadística Bayesiana, es suministrar una metodología para estudiar adecuadamente la información mediante análisis de datos y decidir de manera acertada sobre la mejor forma de actuar.

Los modelos bayesianos primordialmente incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro de un espacio muestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística.

La estadística bayesiana provee cantidades tanto conocidas como desconocidas lo que permite incorporar los datos conocidos dentro de la estimación de los parámetros dados inicialmente, logrando así un proceso de estimación más rico en información haciendo inferencias sobre las cantidades desconocidas[4]

1.1 El Teorema de Bayes

En el año 1763, dos años después de la muerte de *Thomas Bayes* (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de Teorema de Bayes.

En la teoría de la probabilidad el *Teorema de Bayes* es un resultado enunciado por Thomas Bayes en el que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.[5]

El origen del concepto de la obtención de probabilidades posteriores con información limitada se atribute al respetable Thomas Bayes. La fórmula básica para la probabilidad condicional en circunstancias de dependencia se conoce como *Teorema de Bayes.*[6]

$$P(A|B) = P(B \cap A)/P(A)$$

En términos más generales y menos matemáticos, el Teorema de Bayes es de enorme relevancia puesto que vincula la probabilidad de **A** dado **B** con la probabilidad de **B** dado **A**.

Este teorema es conocido también como el teorema de las causas, este método es utilizado para obtener diversos resultados

[4] López de Castilla, Carlos. (2011). "*Estadística Bayesiana*"

[5] BOX GEORGE E.P., Tiao George C.(1992), "*Bayesian Inferences in Statistical Analysis*". Wiley-Interscience Publication. USA.

[6] LEVIN, RICHARD & RUBIN, DAVID. (2004). "Estadística para administración y economía". Séptima edición. Pearson

relacionados con probabilidad condicional.[7]

Antes de presentar el Teorema de Bayes es conveniente precisar algunas definiciones y teoremas previos a fin de poder entender su demostración.

1.1.1 Conceptos Previos del Teorema Bayes

Sucesos o Eventos: Se define simplemente como un subconjunto del espacio muestral **Ω** asociado a un experimento **ε**.

Sucesos mutuamente excluyentes: Se dice que dos sucesos **A** y **B** son mutuamente excluyentes, si estos no pueden ocurrir juntos a la vez, lo que se denota así: **A ∩ B = Ø**, es decir su intersección es el conjunto vacio.

En el Teorema de Bayes, la probabilidad a priori de un evento futuro incierto y la probabilidad condicional de los resultados de la muestra deben ser conocidas. Por lo general, las probabilidades condicionales están determinadas por la aplicación de una norma de distribución de probabilidad de acuerdo con el carácter de dicha distribución.

i) Sea A el evento nulo esto es **A= Ø** se tiene **P(A) = P(Ø) = 0**

[7] PAUL L. MEYER. (1998). "*Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*". Addison Wesley Longman

ii) Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ sucesos mutuamente excluyentes (esto es $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) entonces se tiene:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

iii) Sean **A** y A^c los eventos complementarios esto es $A \cup A^c = \Omega$, es decir la unión de dos eventos es el espacio muestral y se tiene $P(A) + P(A^c) = 1$ o bien $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo evento o suceso A en Ω

iv) Sea **(A U B)** el evento definido como que ocurre A o bien ocurre B. Se tiene:

P(A U B) = P(A) + P (B)- P (A∩B)

Probabilidad Condicional: Este tipo de probabilidad permite modificar la creencia que se tiene acerca de la realización de un experimento aleatorio, algunas veces se obtiene información parcial de un experimento aleatorio de antemano, a que se conozcamos el resultado final del experimento.

El siguiente ejemplo brinda un mejor contexto para la comprensión de la probabilidad condicional

Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2), donde X_i es el resultado del i-ésimo dado i = 1,2. El espacio muestral de este experimento esta dado por 36 resultados equiprobables.

Ω = {(1,1) ,(1,2),(1,3),…,(6,4),(6,5),(6,6)}

Considérense los eventos (sucesos) siguientes:

Universidad del Rosario
La Simulación al Servicio de la Academia
Facultad de Administración
Laboratorio de Modelamiento y Simulación
Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

A= $\{(x_1, x_2) | x_1+x_2=10\}$, B=$\{(x_1,x_2) | x_1>x_2\}$

Listando los elementos de cada uno de los anteriores eventos se tiene:

A = {(4,6),(5,5), (6,4)}

B = {(6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1), (5,4), (5,3), (5,2) ,(5,1), (4,3), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)}

De esta forma **P(A)** = 3/36 = 1/12

P (B) = 15/36 = 5/12

Ahora considérese encontrar la probabilidad del evento B sujeto a que el evento A se dio; esto es ahora nuestro espacio muestral no es el **Ω** original sino A; por lo tanto esta probabilidad notada **P (B/A)** es 1/3 ya que de los tres puntos muestrales de **A**, uno de ellos (6,4) pertenece al evento **B**.

Por último se analiza el evento **A∩B** esto es la intersección de los dos eventos; **A∩B** = {(6,4)} por lo tanto **P (A∩B)** =1/36.

Se observa que:

P (B/A) = P (A∩B)/ P(A)=12/36= 1/3.

Definición: Sean **A** y **B** dos eventos asociados con un experimento **ε**, se tiene la probabilidad del evento B sujeto a A como **P (B/A)= P (A∩B)/ P(A)** si **P(A)>0**

Teorema de multiplicación de probabilidades

Sean:

- ✓ **P (B/A)= P (A∩B)/ P(A)** si **P(A)>0** ó bien **P (A∩B) =P(A) P (B/A)**
- ✓ **P (A/B)= P (B∩A)/ P (B)** si **P (B)>0** ó bien **P (A∩B) =P(A) P (B/A)**

Dado que **A∩B = B∩A**

Un resultado a partir del teorema anterior es **P(A) P (A/B) = P (B) P (A/B)**

Teorema de la probabilidad total; para mostrar y entender este teorema se definen algunos conceptos básicos necesarios

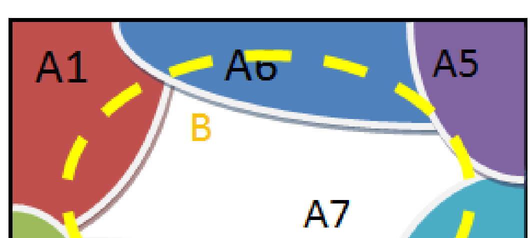
Definición: Se dice que los sucesos {$\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$,…, $\mathbf{A_n}$} representan una partición del espacio muestral **Ω** si:

a) **Ai ∩ Aj = Ø si i ≠ j** cualquier par de eventos en la partición deben ser mutuamente excluyentes.
b) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ la unión de los eventos sucesos {$\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$,…, $\mathbf{A_n}$} es el espacio muestral
c) **P(Ai)> 0** para todo **i**

Importante, una vez se efectué el experimento **ε** ocurre uno y sólo uno de los sucesos **Ai**.

El siguiente diagrama de ven ilustra claramente la situación:

Ω



Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

Consideremos un evento **B** asociado a **Ω**, y sea {**A1, A2,…, An**} una partición de **Ω**.

B se puede representar como:

B= (A1∩B) U (A2∩B) U… (An ∩B)

Ahora bien, como cada una de estas intersecciones son disyuntas se tiene que:

P (B) =P (A1∩B) +P(A2∩B) +… P (An ∩B)

P (B) =P (A1)P(B/ A1) +…+ P (An) P(B / An)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/ A_i)$$

Este último resultado se conoce como el teorema de *Probabilidad Total.*

1.1.2 Demostración del Teorema de Bayes.

Teniendo presente La revisión de los anteriores conceptos se presenta a continuación la demostración del Teorema de Bayes.

Resulta que la probabilidad de alguno de los eventos A_i, dado el caso de haberse dado nuestro evento **B** está dado por: **P (A_i, / B).**

Por definición de probabilidad condicional se tiene:

$$P(A_i / B) = P(B \cap A_i) / P(B)$$

$$P(A_i / B) = P(A_i)\, P(B / A_i) / P(B)$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B / A_i)}$$

Reemplazando P(B), por el resultado de la probabilidad total, obtenemos el Teorema de Bayes.

El Teorema de Bayes ofrece un potente método estadístico para evaluar nueva información y revisar estimaciones que se expresaron con anterioridad basadas en limitada información de probabilidad en donde los datos se encuentran en un solo estado.[8] Si este teorema es utilizado de manera adecuada, es indispensable reunir grandes cantidades de datos en un lapso amplio de tiempo con el fin de tomar mejores decisiones basadas en probabilidad.

El teorema de Bayes, enunciado por Thomas Bayes, en la teoría de la probabilidad, es el resultado que da la distribución de probabilidad condicional de una variable aleatoria A dada B en

[8] RICHARD I. Levin, DAVID S AUTOR RUBIN. (2004). “Estadística para administración y economía”. Séptima edición. Pearson

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

términos de la distribución de probabilidad condicional de la variable B dada A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

El teorema de Bayes es válido en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En ciertas condiciones, los partidarios de la estadística tradicional sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados estadísticos bayesianos permiten probabilidades subjetivas.

El teorema puede ser adecuado para indicar cómo debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando se recibe información adicional de un experimento. La utilidad de la estadística bayesiana está expuesta en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y admitir revisar esas estimaciones en función de la demostración. [9]

1.1.3 Ejemplo del Teorema de Bayes

Partiendo del fundamento anterior, a continuación se muestra un ejemplo sencillo y básico del funcionamiento del teorema de Bayes y sus diferentes ecuaciones:

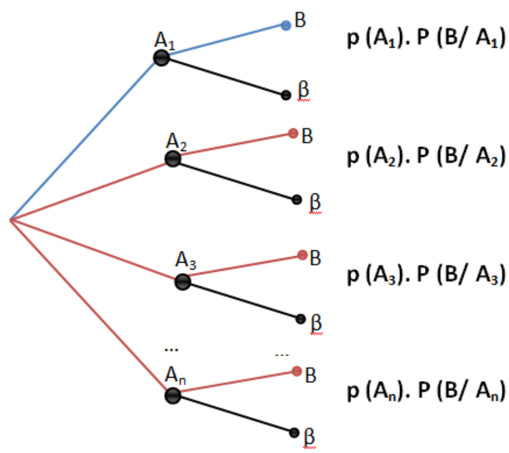
Se debe tener presente que se denomina probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A,

$$\mathbf{p\ (B/A) = p\ (B \cap A)\ /p(A),\ si\ \ p(A) \neq 0}$$

Del mismo modo se denota para p(A/B),

$$\mathbf{p\ (A/B) = p\ (A \cap B)\ /p\ (B),\ si\ \ p\ (B) \neq 0}$$

Como se ha planteado anteriormente, el *Teorema de Bayes* es la concordancia entre probabilidades de que algún suceso ocurra partiendo de un suceso producido.



$$\boxed{p\ (A_1\ /B) = \frac{p\ (A_1 \cap B)}{p\ (B)} = \frac{p\ (A_1).\ P\ (B/\ A_1)}{p\ (B)}}$$

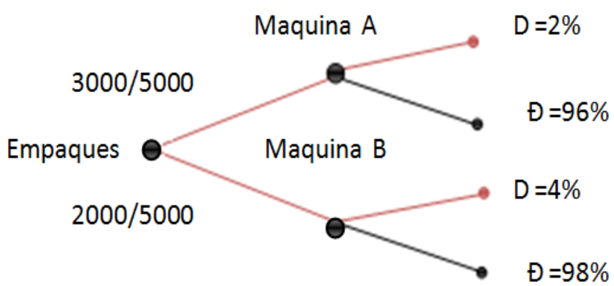
Una fábrica de Embutidos produce 5000 empaques diarios de salchichas. La maquina A produce 3000 empaques, de los cuales el 2% quedan mal embutidos (defectuosos) y la maquina B produce los

[9] SILVA LC, BENAVIDES A. (2001). "*El enfoque bayesiano: otra manera de inferir*". *Gac Sanit.*

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

2000 restantes de los que se sabe el 4% son defectuosos. Determinar la probabilidad de que un envase elegido al azar sea defectuoso y que proceda de la máquina A o de la máquina B.

Para determinar estas probabilidades se debe realizar un árbol de probabilidad para definir las variables de que un empaque sea o no defectuoso.



Ahora bien, se debe calcular la probabilidad de que un empaque elegido al azar sea defectuoso:

- Empaque Defectuoso Maquina A: **p (A∩D) = p(A). p(A/D) =** (3000/5000) *(0.02) = 0.012

- Empaque Defectuoso Maquina A: **p (B∩D) = p (B). p (B/D) =** (2000/5000) *(0.04) = 0.016

La probabilidad de que un empaque sea defectuoso es de 2.8% ya que este resultado pertenece a la suma de las probabilidades de defectos de cada máquina.

Aplicando el Teorema de Bayes.

Se conoce que el empaque seleccionado es defectuoso, se debe relacionar la rama que nos solicitan en el problema con respecto a la probabilidad total:

- Probabilidad de que el empaque defectuoso sea de la Máquina A

  p (A /D) = p (A∩D)/ p (D) = 0.012 / 0.028 = 0.4286
  Corresponde al 4.2 % aproximadamente

- Probabilidad de que el empaque defectuoso sea de la Máquina B

  p (B /D) = p (B∩D)/ p (D) = 0.016 / 0.028 = 0.5714

Corresponde al 5.7 % aproximadamente.

Con el anterior ejemplo queda demostrado que a partir de un hecho demostrable se pueden realizar diferentes inferencias las cuales servirán para realizar análisis de pérdidas o ganancias y del mismo modo tomar decisiones que afecten positivamente un proceso de gestión.

En términos estadísticos más técnicos, el Teorema de Bayes actualiza la información del parámetro a través de las observaciones obtenidas. Lo que se puede hacer debido a que los parámetros y observaciones tienen, conceptualmente, el mismo nivel; ambos tienen distribuciones.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

Según la teoría de la probabilidad El teorema de Bayes es un camino para realizar inferencias; este teorema puede considerarse cómo la búsqueda de la hipótesis más factible dentro de un conjunto de datos y conocimientos previos de la probabilidad de cada hipótesis; como método bayesiano permite modificar valores cuando se dispone de nueva información tratando modelos dentro de la explotación de información; de estas observaciones surge la representación de usar redes bayesianas como sistemas clasificadores.

1.2 Inferencia Bayesiana

La incertidumbre es natural en el proceso de razonamiento donde se pueden establecer reglas para inferir de manera deductiva una proposición determinada que puede ser verdadera o falsa, según sea el límite de esta estimación. Dentro de los métodos de razonamiento se encuentran los *Modelos Bayesianos*, que simulan diferentes condiciones de incertidumbre cuando no se conoce si es verdadera o falsa la hipótesis enunciada en un rango de variación.

Todos los modelos bayesianos tienen en común la asignación de la probabilidad como medida de creencia de una hipótesis, así es que, la inferencia es un proceso de reajuste de medidas de creencia al conocerse nuevos axiomas.

Cuando se utilizan evidencias y observaciones para establecer que una suposición sea cierta, es lo que se denomina como Inferencia Bayesiana. La inferencia bayesiana observa la evidencia y calcula un valor estimado según el grado de creencia planteado en la hipótesis. Esto implica que al tener mayor cantidad de datos disponibles se podrá obtener resultados más satisfactorios.

El uso de la inferencia bayesiana en los casos donde las distribuciones normales se aplican, requiere que sólo dos actos decisión sean evaluados en cierto momento.

La distribución de probabilidad a priori es descriptiva con respecto a la incertidumbre y asocia la estimación de probabilidad con la ocurrencia de un evento al azar. Por el contrario la distribución de probabilidad, más bien, es la estimación de un evento dado que se basa en un juicio informado. Para situaciones de sentencia en la que una decisión es informada se debe ser consciente de una serie de factores de incertidumbre que podrían influir en el valor de los resultados finales.

El uso de la distribución normal puede ser una solución satisfactoria para hallar una aproximación de incertidumbre; la distribución normal se define mediante la identificación de la media y la desviación estándar de la distribución. La media de la distribución normal se puede obtener mediante la identificación el valor más probable al evento aleatorio.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

La media, la mediana y la moda están al mismo punto de una variable de distribución normal. La existencia de una función de utilidad lineal es una indicación de que el valor de ganancia esperada asociada con un acto específico es una función lineal con respecto al nivel de incertidumbre. Una vez de haber establecido el punto de equilibrio (punto de indiferencia), la mejor decisión puede ser determina gráficamente mediante la observación del punto inicial que está por encima o por debajo del punto de indiferencia, y que la elección de la solución es óptima con respecto al punto de equilibrio. [10]

La probabilidad tiene dos formas de interpretación, una *frecuentista* y otra *bayesiana*, estas dos corrientes de pensamiento tienen la comunidad estadística dividida: la primera considera la probabilidad como la frecuencia relativa de un experimento aleatorio, es decir se interpreta la probabilidad como un evento netamente objetivo que encontramos en la naturaleza, en este enfoque se considera que bajo las mismas condiciones si el experimento se realiza un numero grande de veces, la probabilidad del evento A esta dado por $P(A) = \lim_{n \to \propto} \frac{n_A}{n}$ donde n_A es el numero de observaciones dentro del experimento que tienen el atributo y n el número de veces que se repite el experimento.

La segunda, el enfoque bayesiano, interpreta la probabilidad de manera subjetiva, y la utiliza para expresar su creencia respecto a una afirmación, dada cierta evidencia; está estrechamente relacionada con el concepto de probabilidad condicional, concepto que ya se ha presentado con anterioridad y que conlleva al teorema de Bayes; en la corriente bayesiana es común asignarle probabilidades, a cualquier tipo de afirmación, incluso si el experimento asociado no es aleatorio, es de aclarar que el método bayesiano también hace uso de la información contenida en la muestra, pero no depende solo de ella al momento de la toma de una decisión.

Históricamente la probabilidad se ha concebido como un asunto netamente frecuentista, es decir al considerar un experimento como lo puede ser el lanzamiento de una moneda al aire (no cargada) , la experiencia muestra que tras un numero lo suficientemente grande de lanzamientos, la cantidad de caras y sellos obtenidas es la misma, así de esta forma estamos en condiciones de afirmar que la probabilidad de sacar un sello o una cara es 0.5; no obstante en el mismo experimento, una persona podría pensar que la probabilidad de ocurrencia es 0.5, no por el hecho de haber experimentado con la moneda, sino es lo que él espera que suceda. (Probabilidad subjetiva).

---

[10] LÓPEZ DE CASTILLA, Carlos. (2011). "Estadística Bayesiana"

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

Aun cuando en el año 1764 se publico el articulo del reverendo Thomas Bayes (1702-1761), "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances" en la "*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*". El artículo se envió a la Real Sociedad de Londres por parte de un amigo del reverendo Bayes, Richard Price, en el año de 1763.amigo de Bayes, en 1763.[11] Cuyo resultado principal es el conocido Teorema de Bayes, no es sino hasta hace poco que ha surgido una reciente corriente de la estadística, hablamos de la inferencia bayesiana, una rama de la estadística que ha tomado bastante fuerza por sus diversas aplicaciones en distintos campos como lo son medicina, psicología, teoría de la decisión, etc.

De hecho la misma estadística, solo hasta hace relativamente poco es considerada una ciencia independiente, su momento de nacimiento como ciencia moderna se puede pensar en el año (1900) con el trabajo desarrollado por Karl Pearson (1857-1936), matemático británico, quien creó la estadística matemática, pero es fundamentalmente con el trabajo del gran genio matemático y estadístico ingles Ronald Fisher, cuando la estadística adquiere el estatus de una ciencia[12].

Ronald Fisher introduce los conceptos de análisis de verosimilitud, y distribución muestral de las estadísticas, en su artículo publicado en 1922, donde Fisher parte la estadística en dos, y sienta las bases teóricas de esta naciente ciencia, sino que pone a pensar a la comunidad científica, sobre el verdadero papel de la estadística en el mundo, dando origen a controversias que para bien de la estadística, Han engrandecido este gran edificio donde se erige.

La inferencia clásica o también conocida como inferencia frecuentista basa su estudio en la teoría del muestreo, ella solo utiliza información obtenida de la muestra, interpreta la probabilidad como una frecuencia relativa; sus principales métodos como lo son la estimación puntual y la estimación por intervalos de confianza, (método creado en el año de 1934 por Neyman) son los que utiliza esta corriente estadística, junto con las pruebas de hipótesis, método presentado en el año de 1936 por Neyman y Egon Pearson, hijo de Karl Pearson. [13]

Por el contrario la inferencia bayesiana, que está completamente determinada por el uso del teorema de Bayes, nos permite asignar probabilidades a priori, sobre eventos que no son necesariamente de naturaleza aleatoria, es decir podemos incorporar información externa a nuestro

[11] LÓPEZ DE CASTILLA, CARLOS. (2011). "*Estadística Bayesiana*" Universidad Nacional Mayor de San Marcos. EP4066. *2011*-2. August 18, *201*

[12] PAUL L. MEYER. (1998). "*Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*". Addison Wesley Longman

[13] **YÁÑEZ CANAL. SERGIO.** (2000). "*La Estadística una Ciencia del Siglo XX. R.A. FISHER, El Genio*". Revista Colombiana de Estadística. Vol. 23 N 2, páginas 1 *a* 14.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

experimento, siendo más precisos el conocer la ocurrencia de algún evento en nuestro experimento, nos permite reformular nuestra probabilidad, (probabilidad subjetiva) estas probabilidades se logran afinar mediante el uso del teorema de Bayes; esto no se permite en el contexto de la estadística frecuentista (clásica) donde solo es válido asignar probabilidades, cuando estas se someten a experimentación.

Conceptualmente, la diferencia principal entre la estadística frecuentista y la estadística bayesiana, es la interpretación de la probabilidad.

La estadística bayesiana, tuvo un gran auge en el siglo XIX, con los trabajos del gran matemático y físico francés Pierre Simón Laplace, quien toma la idea de trabajar la probabilidad en el sentido inverso desde ese entonces se plasma de esa forma.[14]

El siglo XX estuvo dominado por la visión frecuentista de la estadística, inspirado principalmente con el trabajo de Fisher; convirtiéndose en una muy atractiva herramienta que se utilizaría en las aplicaciones, que en principio parece que eliminara el conocimiento a priori, es así que nace la escuela frecuentista dando lugar a la inferencia estadística (clásica), que durante la primera mitad del siglo XX tuvo un éxito de manera sobresaliente en especial en las aplicaciones, reduciendo cualquier otra alternativa de estudio.[15]

Se pueden encontrar similitudes entre el enfoque clásico y el bayesiano, por ejemplo en ambos enfoques se utilizan modelos que pretenden estimar parámetros que desconocemos, que nos facilitan la caracterización del mundo real, en ambos enfoques se hace uso de la recolección de la información, que son el soporte para la estimación de los parámetros desconocidos.

Hoy en día se ven diferencias marcadas entre el uso de una u otra forma de abordar un problema, entre la clásica y la bayesiana, cada una de ellas ofrece sus propias ventajas, no obstante algunos problemas solo se podrán abordar desde el punto de vista bayesiano; entre las diferencias marcadas podemos mencionar, la forma de estimar los parámetros: para los frecuentistas, los parámetros "p" son valores que aunque se deban estimar, estos no son del todo desconocidos, ellos piensan en el valor "p" como valores fijos que debemos estimar, se piensa en la elección que deba hacerse de los parámetros de manera tal que se maximice la probabilidad de observar datos.

La estadística bayesiana, permite incorporar información externa de manera subjetiva, que se reitera la posibilidad de

[14] ROBERT, STEEL. (1960). " *Principles and Procedures of Statisticas*", ed. Mc Graw Hill

[15] RAMÍREZ, SONIA. & GUTIÉRREZ, LUIS ALBERTO. (2008). "*Probabilidad y Estadística II*". Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

modificar nuestra probabilidad ante la ocurrencia de otro evento dentro de mediante la utilización del teorema de Bayes.

Naturalmente el surgimiento de una nueva corriente estadística, obedece a falencias presentadas dentro de la inferencia clásica, una de ellas son las encontradas en las pruebas de hipótesis esto obliga a corregir las fallas presentadas o en su defecto reemplazarla por una nueva; es allí donde surge el análisis bayesiano.

Uno de los deseos de todo análisis de datos a una población, es que este gane en objetividad, es decir que el punto de vista del investigador poco o nada puedan afectar las conclusiones del experimento.

El estudio de la inferencia clásica, depende primordialmente del tamaño de la muestra, es decir esta inferencia se ve directamente influenciada por este elemento exógeno, por el contrario la principal metodología de la estadística bayesiana obedece a la utilización de una distribución de probabilidad para poder describir las cantidades desconocidas dentro de un problema, estimar un parámetro, en otras palabras, la estadística bayesiana se apoya primordialmente en una distribución de probabilidad para la toma de una decisión en nuestro experimento de estudio.

Resumiendo, la estadística bayesiana, como aquel proceso que permite, mediante una distribución de probabilidad, ajustar un modelo probabilístico, permitiendo obtener información de los parámetros sobre los cuales se desea realizar alguna estimación.

Un gran desarrollo en los últimos años se ha dado en el campo de la estadística bayesiana, en gran medida debido al gran avance en los computadores, que han introducido en su lenguaje distinto paquetes estadísticos.

Debido a que la inferencia bayesiana está fundada en un método basado en datos históricos, puede captar las situaciones en que la dinámica del mercado muestre una firme estrategia de cambios importantes, lo cual proporciona un buen indicador de las condiciones futuras del mercado. [16]

Aplicando la inferencia Bayesiana es posible identificar distintos tipos de patrones de transición como estados de ganancias discretas en un gran conjunto de datos administrativos. Además, se puede investigar acerca de los efectos y las condiciones del mercado por medio de la estimación de un modelo probabilístico.

También se puede estudiar y analizar las deficiencias futuras de las actividades operacionales de una empresa, con la aplicación del método de inferencia

[16] ZELLNER, A. (1987): *"Introducción a la inferencia bayesiana en Econometría.":* John Wiley & Sons

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

bayesiana, el cual no deberá basarse sólo en datos históricos, sino que se debe incluir el análisis de los diferentes escenarios para poder predecir un comportamiento futuro y la gravedad del riesgo; esto con el fin de mejorar las políticas de gestión de riesgos.

La Inferencia bayesiana es una técnica estadística adecuada para reunir las opiniones de expertos en el análisis de datos. Actualmente existe una amplia literatura que envuelve toda la teoría de la inferencia bayesiana y sus aplicaciones para el marco financiero y de negocios.

1.2.1 Ejemplos de Inferencia Bayesiana

Después de haber comprendido el proceso de inferencia y haber estudio con detenimiento el uso del teorema de Bayes, a continuación se expone dos ejemplos sencillos de inferencia bayesiana.

Ejemplo 1.

La narcolepsia es un trastorno primario del sueño, cuya sintomatología principal es la aparición recurrente e irresistible de ataques de sueño reparador. Las personas que tienen este trastorno no descansan bien; por tanto se vuelven irritables y no rinden lo que quisieran.

En una gran ciudad una de cada 1000 personas sufre narcolepsia. Seleccionamos al azar una persona en una gran ciudad ¿Cuál es la probabilidad de que tenga narcolepsia?

- Probabilidad inicial: probabilidad a priori de sufrir narcolepsia en una persona tomada al azar de la población P(N)= 1/1000

Supón que el test es positivo en 99 de cada 100 personas enfermas y también en 2 de cada 100 personas sanas.[17]

- *Verosimilitud:* probabilidad de que el test sea positivo si se tiene narcolepsia (sensibilidad del test) P(+/N)= 99/100
- Probabilidad *final:* probabilidad a posteriori de sufrir narcolepsia si el test ha dado positivo P(N/+). Para calcular esto, hay que aplicar el teorema de Bayes, que vemos a continuación

Los datos que se conocen de la situación se completan en la siguiente tabla:

	Test +	**Test -**	**Total**
Sufren narcolepsia	99	1	100
No sufren narcolepsia	1998	97902	99.900
Total	2097	97903	100.000

Para calcular la probabilidad final, habrá que calcular:

$$P(N/+) = \frac{99}{99+1998} = 0{,}0472$$

La probabilidad de tener narcolepsia, sabiendo que la prueba es positiva es una probabilidad condicional. El numerador

[17] Tomado de: http://www.ugr.es/~mcdiaz/bayes/ejemplos1.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

nos muestra el número de personas que están enfermas y tienen un test positivo. El denominador todas las que tienen test positivo.

El resultado no deja de sorprender a primera vista: **¡Puede parecer que las pruebas médicas son poco fiables!** Lo que pasa es que el número de personas que tienen la enfermedad, en el total de la población es muy pequeño.

- La probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma es muy alta. Casi todas ellas son detectadas en el test (el test tiene mucha *sensibilidad).*
- Por otro lado, la probabilidad de un resultado positivo si se está sano (*falso positivo)* es muy pequeña.
- Pero un suceso con probabilidad pequeña no es un suceso *imposible* y puede ocurrir. Más aún, si el número de personas que pasan la prueba es muy grande, pueden aparecer más falsos positivos que positivos reales (como en el ejemplo).

Qué ocurriría si, en lugar de narcolepsia, el test da positivo en **insomnio**?

La prevalencia del insomnio en la población es bastante mayor que la de la narcolepsia (un 15%), es decir, la probabilidad a priori de insomnio es P (I) = 15/100. La probabilidad de que el test de positivo en una persona con insomnio es de 0,99 y la probabilidad de que de positivo en una persona sana es de 0,02.

Ahora se calcula la probabilidad a posteriori de sufrir insomnio si la prueba es positiva

$$P(I/+) = \frac{P(I \cap +)}{P(+)} = 0'8973$$

El resultado de la prueba de insomnio es mucho más fiable, porque la prevalencia de insomnio en la población es mucho mayor que la narcolepsia.

Las fórmulas que se han aplicado son una simplificación del **teorema de Bayes**.

Ejemplo 2.

El 22% de los clientes de una compañía de seguros de accidentes de automóvil es menor de 30 años. Las estadísticas indican que el 11% de los conductores menores de 30 años tiene un accidente y que sólo el 5% de los mayores de 30 años tienen un accidente. ¿Qué porcentaje de accidentes pagados por la compañía son de clientes menores de 30 años?

Datos del ejercicio

- P(menor 30 años)=0,22; es una probabilidad inicial
- P (mayor o igual de 30 años)=0,78; es una probabilidad inicial
- P(accidente /menor 30 años)=0,11; es una verosimilitud
- P(accidente /mayor 30 años)=0,05; es una verosimilitud

¿Qué pide el ejercicio?

- P(menor 30 años / accidente) es una probabilidad final

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

(1) Sucesos de interés	(2)Probabilidad inicial	(3)Verosimilitud de accidente	(4) Producto	(5)Probabilidad final
Menor 30 años	0,22	0,11	0,0242	0,3829
Mayor o igual 30 años	0,78	0,05	0,039	0,6171
Suma			0,0632	1

Solución

Puesto que se tiene que pasar de probabilidades iniciales a finales, hay que usar el teorema de Bayes. Una forma sencilla es usar la tabla para organizar los datos y cálculos. En primer lugar colocamos en ella los datos conocidos (sucesos de interés, sus probabilidades iniciales y verosimilitudes

A continuación se realiza los productos de las columnas (2) y (3), y se obtiene la suma de los productos (columna 4)

Finalmente se divide cada uno de los productos (columna 4) por la suma de todos los productos (0,0632) para obtener las probabilidades a posteriori. La suma de las probabilidades finales debe ser igual a 1

(1) Sucesos de interés	(2) Probabilidad inicial	(3) Verosimilitud de accidente	(4) Producto	(5)Probabilidad final
Menor 30 años	0,22	0,11		
Mayor o igual 30 años	0,78	0,05		
Suma				

El 38% de los accidentes que tiene que pagar la compañía son de conductores de menos de 30 años.

(1) Sucesos de interés	(2)Probabilidad inicial	(3)Verosimilitud de accidente	(4)Producto	(5)Probabilidad final
Menor 30 años	0,22	0,11	0,0242	
Mayor o igual 30 años	0,78	0,05	0,039	
Suma			0,0632	

2. Fundamentos de las Redes Bayesianas

Las redes bayesianas nacen como requerimiento de mejorar la calidad de la clasificación de los datos para evitar hacer suposiciones sobre los atributos de la información, mediante el uso del planteamiento de Naive Bayes para realizar aproximaciones más acertadas

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

dentro del manejo de las variables. las redes Bayesianas aparecen para facilitar la representación eficiente y el razonamiento riguroso con conocimiento incierto.[18]

El termino redes bayesianas fue adoptado por Judea Pearl en 1985, quien deseaba hacer ahínco en el proceso de el estudio de la información y manejo de los datos, junto con la preparación del teorema de Bayes para la actualización de la información , los procesos de causalidad y la obtención de pruebas dentro del razonamiento que estimaba Thomas Bayes.

Como científico de computación, Judea Pearl es conocido como uno de los gigantes en el campo de la inteligencia artificial, debido a sus aportes en la representación del conocimiento, la lógica no estándar, y el aprendizaje. Los textos de Judea Pearl acerca del *razonamiento probabilístico en sistemas inteligentes* y *el razonamiento probabilístico en sistemas expertos* son ensayos que resumen las propiedades de las redes bayesianas, lo cual contribuyó a establecer las redes bayesianas como un campo de estudio.

Durante el proceso de representar conocimiento con un alto nivel de incertidumbre y la manipulación del razonamiento para la toma de decisiones, es indispensable dar uso a un modelo que represente las variables y sus relaciones, que puedan responder claramente a consultas probabilísticas acerca de la información manipulada; cuando se solicita especificar las aplicaciones de los datos obtenidos se encuentra con la dificultad de determinar concretamente como puede influir los datos no observados dentro del proceso de inferencia, es aquí donde una red bayesiana puede ser utilizada para determinar el conocimiento obtenido de un subconjunto de datos cuando las demás variables son observadas.

De aquí se puede determinar que una red bayesiana será una estructura en la que se encapsulan las relaciones de dependencia que hay entre los atributos de los datos observados, describiendo la distribución de probabilidad en un conjunto de variables permitiendo identificar dependencias entre los diferentes conjuntos de variables. Es un modelo probabilístico que relaciona un conjunto de variables aleatorias mediante un grafo dirigido, son redes graficas sin ciclos en el que se representan variables aleatorias y las relaciones de probabilidad que existan entre ellas que permiten conseguir soluciones a problemas de decisión en casos de incertidumbre.

Una red Bayesiana es una herramienta informática a la que puede crearse diferentes modelos dependiendo del caso de estudio según la concepción que tenga

[18] SHAFER, GLENN & PEARL, JUDEA. (1990) "*Readings in uncertain reasoning*".Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

el diseñador y de las condiciones del comportamiento de las variables. En esta herramienta sobresale debido a que no solo permite un proceso hacia atrás (*backward*), por ejemplo como una operación financiera que ha sido realizada en términos de riesgos operacionales; sino también hacia adelante (*forward*) donde la red puede calcular las probabilidades de pérdida o de beneficio usando la regla de Bayes.[19]

Como foco activo de investigación, las redes bayesianas ofrecen variadas propuestas de algoritmos tanto para el aprendizaje como para la realización de inferencias brindando de este modo distintas aplicaciones como clasificación, predicción y diagnóstico.

Las redes bayesianas se caracterizan por poseen las redes bayesianas se puede destacar que permiten aprender sobre relaciones de dependencia y causalidad, las cuales combinan conocimiento con datos.[20]

Adicionalmente, se manifiestan en la toma de decisiones en general, en el análisis de riesgos, análisis de fiabilidad, en el desarrollo de sistemas expertos de origen comercial, este ultimo debido al creciente manejo en el sector bancario para el procesamiento de determinados riesgos operacionales.

A principios de la década de los 80 se presentó limitantes con respecto a los primitivos sistemas probabilísticos en cuanto a cuantificación computacional, problema que fue tratado con el manejo de independencia condicional de variables y la creación de modelos gráficos probabilísticos que actualmente permiten elaborar algoritmos con características de razonamiento.

El método más usado en los últimos años en tareas de aprendizaje, clasificación y análisis cualitativo de datos han sido las redes bayesianas, las cuales permiten realizar representaciones entre las relaciones de los atributos y representación del conocimiento con incertidumbre debido al creciente aporte en campos de investigación como teoría de toma de decisiones, estadística e inteligencia artificial.

Con el uso de estas redes se ha eliminado algunos problemas de razonamiento probabilístico como el de poder representar la incertidumbre en un esquema general de razonamiento describiendo las relaciones existentes entre las variable mediante probabilidades condicionadas.[21]

[19] PEARL JUDEA. (2000). "*Causality: Models, Reasoning and Inference*", CUP. Chapters 1, 5 and 7.

[20] DAVID A. VELASCO. (2007). "*Redes Bayesianas un enfoque hacia la Inteligencia Artificial*".

[21] D.W. North. (1988)"*A tutorial introduction to decision theory*". *IEEE Trans. Systems Science and Cybernetics*,. Reprinted in Shafer & Pearl. 4-

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

Debido a su fácil interpretación las redes bayesianas permiten extraer las explicaciones más probables dentro de una determinada observación incorporando el conocimiento en forma cualitativa. La variabilidad e incertidumbre de algún proceso puede ser capturado por las redes bayesianas desde el punto de vista probabilístico, suministrando distribuciones de probabilidad para diferentes intervalos de tiempo dadas algunas condiciones iniciales.

La inferencia que se realiza dentro del proceso de elaboración de una red bayesiana consiste en extraer la información obtenida por las variables manipuladas dentro del proceso de construcción de una red bayesiana después de ser comparada con las variables no observadas. Esto permite que sea factible describir las relaciones entre las variables a partir de los datos. Incluso es posible aprender la estructura completa de la red a partir de datos completos o con algunos de sus valores desconocidos; lo cual puede utilizarse para tomar decisiones radicales implantando posibles acciones tomando beneficio de los resultados.[22]

(3)- 19-68 *(cubre sólo la parte normativa de la teoría de la decisión)*

[22] GEIGER, D., and Goldszmidt, M. (1997). "*Bayesian network classifiers". Machine Learning*" 29, 131–163.

Es importante observar la estructura de la red que suministra información sobre las dependencias probabilísticas entre las variables y las independencias condicionales de estas. La inserción de las relaciones de independencia en la estructura de las redes bayesianas es una excelente herramienta para representar conocimiento de forma compacta basada en la propagación de las probabilidades de acuerdo con las leyes de la teoría de la probabilidad.

3. La toma de decisiones y el método bayesiano

La toma de decisiones se considera como una función basada en el ejercicio del análisis en frío de la verificación de hechos concretos y en la capacidad de hacer inferencias sobre la ocurrencia de eventos futuros.

Para mejorar las estimaciones de probabilidad en la toma de decisiones, se hace necesaria la aplicación del Teorema de Bayes donde las estadísticas que se realizan consisten en observar el análisis de los datos, lo que permite al investigador realizar inferencias o hacer exclusiones u opiniones personales sobre el tema de estudio.[23]La Estadística Bayesiana tiene el propósito de incorporar juicios encaminados en el análisis de los datos basadas en la experiencia.

[23] ALEXANDER, C. (2003).Operacional Risk. Regulation, Analysis and Management. Financial Times / Prentice Hall

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

La diferencia principal que existe entre la estadística clásica y la inferencia Bayesiana consiste en que la estadística clásica utiliza intervalos de estimación y prueba de hipótesis y el análisis estadístico Bayesiano evalúa las acciones de la alternativa de decisión dentro del contexto de las consecuencias económicas. Estas consecuencias económicas pueden ser formuladas como valores económicos o pérdida de oportunidad comercial representados en un contexto evaluativo.

Desde un aspecto práctico, el análisis estadístico clásico utiliza procedimientos de decisión basándose totalmente en el estudio de los datos obtenidos a través de un muestreo aleatorio de la población total, los procedimientos de decisión relacionados con el método de inferencia Bayesiana incluye el análisis de los datos de la muestra, pero no depende únicamente de la disponibilidad de dichos datos.

Una de las principales aplicaciones de los Modelos Bayesianos es la derivación de las diferentes alternativas con el propósito de alterar las probabilidades asociándolas con una situación de decisión, en la que los datos en los que se basa en sí, es en los juicios de los individuos.

La Inferencia Bayesiana es una alternativa útil para análisis en aplicaciones empresariales en proporción de los costos reales y las oportunidades en que las decisiones a menudo deben hacerse en condiciones de incertidumbre.

Los modelos bayesianos también se han aplicado a los precios en el comercio de materias primas, en este contexto, la aplicación de un modelo bayesiano se hace a través de las expectativas de precios de los fabricantes; por ejemplo si se supone que todos los pedidos son de un gran lote de reserva y que el fabricante cree que los precios de las órdenes de compra, son generados por una distribución normal según dicha orden de compra. Supóngase, además, que el fabricante no está seguro de la media de distribución de los precios de compra, lo cual representa una incertidumbre ante los posibles valores de la media de distribución.[24]

El análisis posterior permite al fabricante perfeccionar la estimación de la varianza del menor precio ofrecido siguiendo un análisis bayesiano que le permite entrar al mercado con una óptima competencia.

Debido al crecimiento de la actividad en el sector financiero las redes bayesianas han realzado su importancia ya que son utilizadas como herramienta de análisis en el riesgo financiero, obligando a las entidades financieras a formular distintos métodos de detección y regulación en el tratamiento de riesgos operacionales.

---

[24] ZELLNER, A. (1987): "Introducción a la inferencia bayesiana en Econometría.": John Wiley & Sons.

En este caso los modelos de redes bayesianas tienen presente al información histórica de los datos que corresponden a los acontecimientos de riesgo como indicadores de perdida para poder explicar la información contenida en términos financieros.

Las redes bayesianas que se construyen para indicar factores de riesgo operacional, representan básicamente la definición de variables y la estimación de probabilidades de diferentes categorías de un evento, entre ellas están la más usadas para expresar probabilidades condicionales en los indicadores de riesgos.

Durante el proceso de creación de una red bayesiana se debe revisar las probabilidades condicionales de la información histórica requerida inicialmente y aplicar la metodología distribución de probabilidad según sea el caso de estudio, por ejemplo el número de operaciones o productos sujetos a pérdidas para el estudio de riesgos operacionales; en donde se deberá recopilar toda la información contenida en datos externos como fraudes y robos y de este modo sacar el mayor provecho al en foque bayesiano.

Cada empresa está en la libertad de construir el modelo de red bayesiana que mejor se adecue a sus necesidades, ya sea para acrecentar la transparencia del proceso de operación, realizar un análisis para revelar situaciones extremas de riesgo, considerar el riesgo operacional con aspectos relacionados al mercado y al crédito, apoyar la gestión y la toma de decisiones o incluso realizar modelos de diagnostico medico, además de optimizar los proceso de la ingeniería de software.[25]

Son demasiados los procesos en que las redes bayesianas han brindado su apoyo, a continuación se presentan algunos interesantes proyectos investigativos y aplicativos que sirven para comprender mejor el objetivo de los métodos bayesianos.

Por ejemplo en el capo de la medicina se encuentran diferentes proyectos que han servido para realizar diagnósticos ó para la clasificación de servicios médicos; como es el caso del licenciado Severino Fernández Galán de la universidad de Madrid, quien en su tesis doctoral desarrolla un sistema que ayuda a los oncólogos a determinar algún tipo de cáncer en la faringe de los humanos y el modelo de crecimiento que este tenga. *Fernández* afirma: "El diagnóstico y el pronóstico de la extensión de un cáncer son tareas llenas de incertidumbre. Esto es debido, por un lado, a la naturaleza no determinista de que las esta enfermedad y, por otro lado, a la información incompleta, imprecisa o errónea que el oncólogo puede obtener. Por ello, las redes bayesianas resultan apropiadas para

---

[25] NEIL, M. & Trahan E. (2002). "Using Bayesian Networks Topredic Operational Risk". Capital Markets News.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

el modelado de procesos causales con incertidumbre como los que determinan la evolución de un cáncer."[26]

Continuando en el campo medicinal, también se puede enunciar la utilización de la redes bayesianas en el triaje hospitalario, en este proyecto se limita al problema de enfermedades cardiovasculares y respiratorias, con sus respectivas categorías sintomáticas; este sistema pretende determinar según los síntomas presentados por los pacientes el nivel de triaje con el cual será identificado por el doctor y de este modo se le prestaría el servicio.[27]

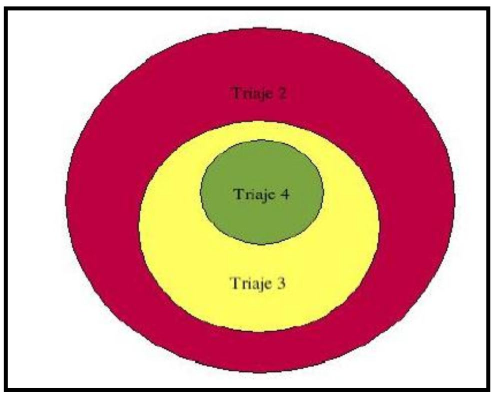


Figura 1: Arquitectura en capas del sistema de soporte a la decisión en el triaje basado en redes bayesianas[24]

[26] FERNÁNDEZ, SEVERINO. (2002). "*Redes bayesianas temporales: aplicaciones médicas e industriales*". Tesis Doctoral publicada, Centro de Investigaciones sobre Sistemas Inteligentes de ayuda a la decisión, Universidad Nacional de Educación a Distancia de Madrid.

[27] ABAD-GRAU, MARÍA M. & IERACHE JORGE S. (2007). "*Aplicación de Redes Bayesianas en el Modelado de un Sistema Experto de Triaje en Servicios de Urgencias Médicas*". Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Articulo Ingenieril 17-05-07

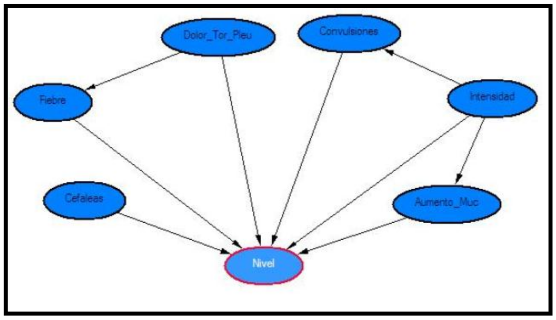


Figura 2: Estructura del clasificador bayesiano obtenido[24]

Retomando las diversas utilidades que poseen las redes bayesianas, es válido mencionar los aportes que estas han brindado al ámbito ingenieril; como es el proyecto realizado por **COMPETISOFT** (Mejora de Procesos para Fomentar la Competitividad de la Pequeña y

Mediana Industria del Software de Iberoamérica). Proyecto en el que se expone una red Bayesiana que permite apoyar la actividad de diagnostico del estado de los procesos software al interior de un programa de mejora que sigue el estándar internacional ISO/IEC. Francisco J. Pino Coordinador del proyecto afirma que: "Esta red Bayesiana aunque ha sido desarrollada en el entorno de las pequeñas empresas puede ser utilizada también por cualquier tipo de organización, sin importar el tamaño".[28]

La construcción de la red Bayesiana propuesta por FRANCISCO J. PINO se realizó bajo un análisis de la literatura y

[28] PINO, FRANCISCO J. PIATTINI, MARIO & OKTABA, HANNA. (2006). "*Red Bayesiana como Apoyo al Diagnóstico del Estado de los Procesos Software para la Mejora de Procesos.*" Una publicación COMPETISOFT 12-07-06.

Universidad del Rosario
La Simulación al Servicio de la Academia
Facultad de Administración
Laboratorio de Modelamiento y Simulacion
Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

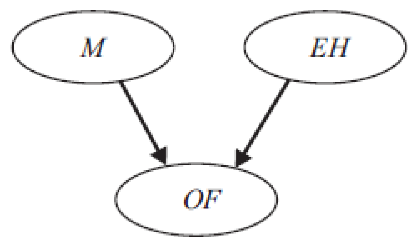
con el conocimiento de un experto humano en el área de mejora de procesos software se diseña la red y se incluyeron las probabilidades a priori y condicionales de las variables de cada uno de los nodos de la red Bayesiana, para poder obtener el resultado esperado. El entorno en el cual implementó la red Bayesiana el cual sirve para el diagnostico del estado de los procesos software para la mejora de procesos, es el programa de manipulación y control de datos llamado *Elvira.*

Ahora bien, como la finalidad de esta sección es el papel que juega las redes bayesianas en la toma de decisiones; se reseñan a continuación un par de proyectos aplicados a la gestión del riesgo y toma de decisiones .

MARIO CASTILLO, profesor instructor de la Universidad de los Andes propone los modelos bayesianos como una metodología para la Medición del Riesgo Operativo, ya que estos modelos utilizan variables que se consideren relevantes para aclarar la ocurrencia de los posibles eventos de pérdida, así como información histórica sobre diferentes eventos de pérdida que se vayan presentando.[29]

El proyecto de MARIO CASTILLO desarrolla una metodología estructurada para la identificación y cuantificación del riesgo operativo en entidades financieras, soportada en modelos de Redes Bayesianas y Simulación, y la aplica en una entidad financiera colombiana.

Para comprender mejor el modelo de red abyesiana, se toma un sencillo ejemplo expuesto por Félix Doldan de su artículo *Redes bayesianas y riesgo operacional;* en este ejemplo se identifica el entorno del mercado cuya evolución se simplifica en etapa de alza y en etapa baja (F1), al equipo humano capaz de procesar operaciones financieras (F2), y al proceso de realizar operaciones financieras de forma correcta o incorrecta (Variable Z); ilustrado en el siguiente grafo:



M: Contorno de mercado (va al alza o a la baja); EH: Equipo humano (funcionamiento satisfactorio o insatisfactorio); OF: Operaciones financieras (ganancia o pérdida).

Figura 3: Red Bayesiana

Es de recalcar que el resultado de las operaciones financieras realizadas depende del funcionamiento del equipo humano, así como la evolución del mercado.[30]

DISTRIBUCIONES DE I		
Mercado (M)		E
Alza (A)	0,6	Funcionamie
Baja (B)	0,4	Funcionamie

	1	

DISTRIBUCIONES CO		
	A	A

[29] CASTILLO, MARIO & MENDOZA, ÁLVARO. (2004). "*Diseño de una Metodología para la Identificación y la Medición del riesgo Operativo en Instituciones Financieras*". Universidad de los Andes. Facultad de Ingeniería. Revista de ingeniería, Vol. 19. Bogotá, Colombia

[30] Tomado de: Félix Doldan *Redes bayesianas y riesgo operacional*

Figura 4: Tabla de Distribuciones

La red, usando la regla de Bayes, calcula las probabilidades de beneficio o de pérdida: 0,748 y 0,252, respectivamente (Figura 5).

M	P (M)	EH	P (EH)	P (M, EH)	P (Bfo. / M,EH)	P (Bfo.)
A	0,6	Fc	0,8	0,48	0,95	0,456
A	0,6	Fi	0,2	0,12	0,4	0,048
B	0,4	Fc	0,8	0,32	0,7	0,224
B	0,4	Fi	0,2	0,08	0,25	0,03
						--------- 0,748

M	P (M)	EH	P (EH)	P (M, EH)	P (Pérdida / M,EH)	P (Pérdida)
A	0,6	Fc	0,8	0,48	0,05	0,024
A	0,6	Fi	0,2	0,12	0,6	0,072
B	0,4	Fc	0,8	0,32	0,3	0,096
B	0,4	Fi	0,2	0,08	0,75	0,06
						--------- 0,252

Figura 5: Regla de Bayes

Ahora conociendo que la operación financiera ha sido realizada con pérdida, en qué medida es imputable al equipo humano o, simplemente, es debida al azar del mercado. Para ello, la red bayesiana, conociendo el estado como igual a pérdida, determina, aplicando la regla de Bayes, las probabilidades de funcionamiento incorrecto o insatisfactorio del equipo humano (Figura 6).

M	P (M)	EH	P (EH)	P (M, EH)	P (Pérdida / M,EH)	P (Pérdida)
A	0,6	Fc	0,8	0,48	0,05	0,024
A	0,6	Fi	0,2	0,12	0,6	0,072
B	0,4	Fc	0,8	0,32	0,3	0,096
B	0,4	Fi	0,2	0,08	0,75	0,06
						--------- 0,252

$$P(Fi / Pérdida) = \frac{P(M, Fi).P(Pérdida / M, Fi)}{\sum P(M, EH).P(Pérdida / M, EH)} = \frac{0{,}072 + 0{,}06}{0{,}252} = 0{,}5238$$

Figura 6: Probabilidades (variable z)

Finalmente se hace referencia al proyecto elaborado por un par de jóvenes estudiantes administración de la Universidad Tecnológica de Shenyang en china, quienes exponen el modelo de red bayesiana para determinar la autenticidad de índices financieros a través de análisis de correlación y métodos bayesianos de la red. Dicho modelo refleja la relevancia entre los muchos índices financieros y las ganancias por acción y no sólo se utiliza para predecir y determinar, sino también para juzgar la causa de la falsedad de los índices financieros, lo que proporciona un método de investigación para la detección y el análisis de la información financiera.[31]

Son demasiadas las actividades en las que las redes bayesianas se han destacado, como evaluación de riesgos o fiabilidad que tratan con valores inciertos o probabilísticos; en donde el análisis de la red puede proveer ideas para establecer controles y límites que amortigüen el riesgo operacional y permite examinar los datos acumulados para la mejora de

[31] LI SONG, CHEN REN-CUI & HAI-CHAO TIAN. (2009). "*An Application of Bayesian Network Technology to Financial Index Discrimination*". Shenyang University of Tecnology. China. Taiwan Electronic Periodical Services. Vol. 6, No.4.2009-12.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

los procesos lo cual mejora la calidad en los mismos.

No se puede afirmar que exista una modelo general de red bayesiana que pueda ser utilizada por el sector financiero, todo depende de la selección del instrumento informático adecuado según el objetivo de la empresa, así se consigue modelo eficiente y una técnica cuyo uso será cada vez más perfeccionada.

CONCLUSIONES

El teorema de Bayes resulta simple si solo hay que tomar la variable principal de la que se quiere conocer la probabilidad teniendo en cuenta los parámetros de la formula. Las aplicaciones con el teorema de Bayes son innumerables, ya que con el uso del teorema de Bayes se pueden hacer demasiadas inferencias probabilísticas haciendo así sencillo el proceso cuando se implementa el uso de diagramas de árbol.

El método bayesiano puede ser apropiado si los gerentes a cargo de la toma de decisiones están dispuestos a utilizar un modelo que tenga en cuenta sus conocimientos y experiencia. Una de las claves consiste en suministran una forma útil para evaluar a los consumidores; lo que le permite al gerente ejercer control a los factores que pueden influir en el impacto del estudio del mercado. Estos experimentos son útiles para medir la respuesta del consumidor a las nuevas actividades que la empresa no ha intentado históricamente.

La teoría de la decisión bayesiana es ideal en aplicación para la solución de problemas de comercialización, teniendo en cuenta los parámetros de la incertidumbre; donde la incertidumbre debe tener en cuenta la toma de decisiones como una acción que establece el valor de diversas variables en el entorno de mercado que enfrenta el consumidor y las compañías.

La importancia y uso creciente de los nuevos modelos, representa la inmersión en un nuevo mundo en el cual la incertidumbre no constituye un impedimento para un eficaz tratamiento en la toma de decisiones y evaluación de procesos.

La combinación de un adecuado sistema de inferencia con el conocimiento adquirido durante la elaboración de un modelo bayesiano por parte de los expertos, constituye una gran fortaleza para cualquier análisis, puesto que existen factores externos al sistema que proporcionan información adicional para la evaluación del requerimiento.

Edición N° 2 - Febrero de 2011 ISSN 2027-7709

BIBLIOGRAFIA

- ALEXANDER, C. (2000): "*Bayesian Methods for Measuring Operacional Risks*".
- ALEXANDER, C. [ed.] (2003): Operacional Risk. Regulation, Analysis and Management.
- ABAD-GRAU, MARÍA M. & IERACHE JORGE S. (2007). "*Aplicación de Redes Bayesianas en el Modelado de un Sistema Experto de Triaje en Servicios de Urgencias Médicas*". Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Articulo Ingenieril 17-05-07
- ADAM, B. (2010): "*How to Manage Risk (After Risk Management Has Failed* ": Harvard Business Review, Publication at October 01.
- BERGER, J. (1985): "*Statistical decision theory and Bayesian analysis*", Springer-Verlag, Nueva York.
- BOX GEORGE. (1992). "*Bayesian Inferences in Statistical Analysis".* Wiley Interscience Publication. USA
- CARLIN BRADLEY P. (1996). "*Bayesian and Empirical Bayes Methods for Data Analysis".* Chapman & Hall/CRC. Segunda edición.
- CASTILLO, MARIO & MENDOZA, ÁLVARO. (2004). "*Diseño de una Metodología para la Identificación y la Medición del riesgo Operativo en Instituciones Financieras*". Universidad de los Andes. Facultad de Ingeniería. Revista 19. Bogotá, Colombia
- CHEESEMAN, P. (1983). "*A method of computing generalized Bayesian probability values for expert systems*". Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (pp. 198-202). Karlsruhe, West Germany: Morgan Kaufmann.
- COOPER, G.F. & Herskovits, E.H. (1991). A Bayesian method for the induction of probabilistic networks from data (Report SMI-91-1). Pittsburgh PA: University of Pittsburgh, Section of Medical Informatics. (Also available as Report KSL-91-02, from the Section on Medical Informatics, Stanford University, Stanford, CA.)
- D.W. North. (1988)"*A tutorial introduction to decision theory*". *IEEE Trans. Systems Science and Cybernetics*,. Reprinted in Shafer & Pearl. 4-(3)- 19-68 *(cubre sólo la parte normativa de la teoría de la decisión)*

- Experiments," Harvard Business Review", 81 (April).Financial Times / Prentice Hall.
- FERNÁNDEZ, SEVERINO. (2002). "*Redes bayesianas temporales: aplicaciones médicas e industriales*". Tesis Doctoral publicada, Centro de Investigaciones sobre Sistemas Inteligentes de ayuda a la Decisión, Universidad Nacional de Educación a Distancia de Madrid.
- GEIGER, D., and Goldszmidt, M. (1997). "*Bayesian network classifiers. Machine Learning*" 29, 131–163.
- HECKERMAN, D.; MAMDANI, A.; WELLMAN, M. (1995): "*Real-World Applications of Bayesian Networks*", Communications ACM, 38, (3), pp. 25-26.
- JENSEN, F.V. (1996): "*An Introduction to Bayesian Networks*". Berlín: Springer Verlag.
- LI SONG, CHEN REN-CUI & HAI-CHAO TIAN. (2009). "*An Application of Bayesian Network Technology to Financial Index Discrimination*". Shenyang University of Tecnology. China. Taiwan Electronic Periodical Services. Vol. 6, No.4.2009-12.
- LÓPEZ DE CASTILLA, CARLOS. (2011). "*Estadística Bayesiana*" Universidad Nacional Mayor de San Marcos. EP4066. *2011*-2. August 18, *2011*
- LOVEMAN, Gary (2003), "*Diamonds in the Data Mine*," Harvard Business Review.
- MARTÍNEZ, FRANCISCO. (1998): "*Una guía completa para economistas en la valuación de opciones*": Gaceta de Economía.
- NEIL, M. & TRAHAN E.(2002). "*Using Bayesian Networks topredic Operational Risk*". Capital Markets News.
- PAUL L. MEYER. (1998). "*Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*". Addison Wesley Longman
- PEARL JUDEA. (2000). "*Causality: Models, Reasoning and Inference*", CUP. Chapters 1
- PETER ROSSI, PHIL DE LURGIO, & DAVID KANTOR. (2010). "*Making Sense of Scanner Data*" Harvard Business Review.
- PINO, FRANCISCO J. PIATTINI, MARIO & OKTABA, HANNA. (2006). "*Red Bayesiana Como Apoyo al Diagnóstico del Estado de los Procesos Software para la Mejora de Procesos.*" Una publicación COMPETISOFT 12-07-06.

- RAMÍREZ, SONIA. & GUTIÉRREZ, LUIS ALBERTO. (2008). "*Probabilidad y Estadística II".* Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

- LEVIN, RICHARD & RUBIN, DAVID. (2004). "Estadística para administración y economía". Séptima edición. Pearson

- ROBERT STEEL. (1960). "*Principles and Procedures of Statisticas*", ed. Mc Graw Hill

- SHAFER, GLENN & PEARL, JUDEA. (1990) "*Readings in uncertain reasoning"*.Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.

- SILVA LC, BENAVIDES A. (2001). "*El enfoque bayesiano: otra manera de inferir*". *Gac Sanit*

- Your Customers," Harvard Business Review, 82 (July-August).

- ZELLNER, A. (1977): "*Maximal data information prior distributions in new methods in the applications of bayesian methods*", Aykac y Brumat, North-Holland.

- ZELLNER, A. (1987): "*Introducción a la inferencia bayesiana en Econometría*.": John Wiley & Sons.

- YÁÑEZ CANAL.SERGIO. (2000). "*La Estadística una Ciencia del Siglo XX. R.A. FISHER, El Genio*". Revista Colombiana de Estadística. Vol. 23 N 2, páginas 1 *a* 14.