Modelos de Ecuaciones Simultáneas

Considere el siguiente modelo:

$$R_t = \beta_0 + \beta_1 M_t + \beta_2 Y_t + u_{1t} \quad (1)$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_t + u_{2t} \quad (2)$$

donde *R* y *Y* son variables endógenas, y *M* es determinada exógenamente.

La información que tenemos disponible es la siguiente:

Y	M	I	G	R
503.7000	144.2000	74.80000	53.50000	3.990000
520.1000	148.7000	71.70000	57.40000	3.600000
560.3000	150.9000	83.00000	63.40000	3.570000
590.5000	156.5000	87.10000	64.20000	3.720000
632.4000	163.7000	94.00000	65.20000	4.060000
684.9000	171.3000	108.1000	66.90000	4.220000
749.9000	175.4000	121.4000	77.80000	5.160000
793.9000	186.9000	116.6000	90.70000	5.070000
864.2000	201.7000	126.0000	98.80000	5.590000
930.3000	208.7000	139.0000	98.80000	6.850000
977.1000	221.4000	136.3000	96.20000	7.370000
1054.900	235.9000	153.7000	97.60000	5.770000
1158.000	255.8000	179.3000	104.9000	5.850000
1294.900	271.5000	209.4000	106.6000	6.920000
1396.700	283.8000	208.9000	116.4000	7.810000

Es posible identificar las ecuaciones?

Ec.	*R*	*Y*	1	*M*	*# Rest.*	*Condición de Orden*
1	1	$-\beta_2$	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	No está identificada
2	$-\alpha_1$	1	$-\alpha_0$	0	1	Exactamente

Cómo estimamos los parámetros de la ecuación (2)?

A partir de las ecuaciones (1) y (2), las ecuaciones de forma reducida están dadas por las siguientes expresiones:

$$R_t = \frac{\beta_0 + \beta_2\alpha_0}{1-\beta_2\alpha_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_2\alpha_1} M_t$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0 + \beta_0\alpha_1}{1-\beta_2\alpha_1} + \frac{\alpha_1\beta_1}{1-\beta_2\alpha_1} M_t$$

Que pueden ser escritas en forma mas compacta como:

$$R_t = \pi_{11} + \pi_{12} M_t$$

$$Y_t = \pi_{21} + \pi_{22} M_t$$

A partir de las ecuaciones anteriores podemos establecer que:

$$\alpha_1\pi_{12} - \pi_{22} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi_{22}}{\pi_{12}}$$

Ahora bien, utilizando la información disponible, podemos estimar la ecuación que está exactamente identificada utilizando MCI. Para ello, utilizamos MCO para estimar la ecuación de forma reducida de *R*:

Dependent Variable: R
Method: Least Squares
Sample: 1960 1974
Included observations: 15

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.176195	0.811705	-0.217068	0.8315
M	0.027615	0.003991	6.919989	0.0000

R-squared	0.786487	Mean dependent var	5.303333
Adjusted R-squared	0.770063	S.D. dependent var	1.441505
S.E. of regression	0.691227	Akaike info criterion	2.222869
Sum squared resid	6.211332	Schwarz criterion	2.317276
Log likelihood	-14.67152	F-statistic	47.88625
Durbin-Watson stat	1.167829	Prob(F-statistic)	0.000011

y la ecuación de forma reducida de *Y*:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1960 1974
Included observations: 15

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-363.7721	25.72233	-14.14227	0.0000
M	6.104147	0.126459	48.26975	0.0000

R-squared	0.994451	Mean dependent var	847.4533
Adjusted R-squared	0.994025	S.D. dependent var	283.3689
S.E. of regression	21.90448	Akaike info criterion	9.134825
Sum squared resid	6237.480	Schwarz criterion	9.229232
Log likelihood	-66.51119	F-statistic	2329.969
Durbin-Watson stat	1.270539	Prob(F-statistic)	0.000000

Recordando que:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\pi_{22}}{\pi_{12}} = \frac{6.104147}{0.027615} = 221.045$$

Un procedimiento similar se puede utilizar para estimar el parámetro α_0.

Como la ecuación está exactamente identificada, MCI es equivalente a aplicar MC2E. Para aplicar MC2E recordemos en primer lugar que la razón por la cual no podemos aplicar MCO en la ecuación:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_t + u_{2t}$$

es porque la variable del lado derecho es endógena, y por consiguiente debemos utilizar un instrumento. La primera etapa de MC2E es la ecuación de forma reducida de *R*:

Dependent Variable: R
Method: Least Squares
Sample: 1960 1974
Included observations: 15

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.176195	0.811705	-0.217068	0.8315
M	0.027615	0.003991	6.919989	0.0000

R-squared	0.786487	Mean dependent var	5.303333
Adjusted R-squared	0.770063	S.D. dependent var	1.441505
S.E. of regression	0.691227	Akaike info criterion	2.222869
Sum squared resid	6.211332	Schwarz criterion	2.317276
Log likelihood	-14.67152	F-statistic	47.88625
Durbin-Watson stat	1.167829	Prob(F-statistic)	0.000011

A partir de esta ecuación encontramos $\hat{R}_t$. Posteriormente, en la segunda etapa estimamos:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1960 1974
Included observations: 15

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-324.8250	24.93584	-13.02643	0.0000
RHAT	221.0456	4.579381	48.26975	0.0000

R-squared	0.994451	Mean dependent var	847.4533
Adjusted R-squared	0.994025	S.D. dependent var	283.3689
S.E. of regression	21.90448	Akaike info criterion	9.134825
Sum squared resid	6237.480	Schwarz criterion	9.229232
Log likelihood	-66.51119	F-statistic	2329.969
Durbin-Watson stat	1.270539	Prob(F-statistic)	0.000000

Si utilizamos la opción TSLS disponible en Eviews, para estimar los parámetros de la segunda ecuación obtenemos:

Dependent Variable: Y
Method: Two-Stage Least Squares
Sample: 1960 1974
Included observations: 15
Instrument list: C M

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-324.8250	163.5428	-1.986177	0.0685
R	221.0456	30.03408	7.359826	0.0000

R-squared	0.761333	Mean dependent var	847.4533
Adjusted R-squared	0.742974	S.D. dependent var	283.3689
S.E. of regression	143.6615	Sum squared resid	268302.1
F-statistic	54.16704	Durbin-Watson stat	1.128420
Prob(F-statistic)	0.000006		

Los parámetros estimados son idénticos a los que se obtienen cuando aplicamos MC2E “manualmente”. Sin embargo, es importante observar que los errores estándar difieren considerablemente. Para efectos de inferencia debemos utilizar los de arroja la opción TSLS.

Para propósitos de comparación, la estimación de la ecuación por MCO produce los siguientes resultados:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1960 1974
Included observations: 15

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-91.61179	129.8351	-0.705601	0.4929
R	177.0707	23.67899	7.477969	0.0000

R-squared	0.811376	Mean dependent var	847.4533
Adjusted R-squared	0.796866	S.D. dependent var	283.3689
S.E. of regression	127.7155	Akaike info criterion	12.66105
Sum squared resid	212046.1	Schwarz criterion	12.75546
Log likelihood	-92.95789	F-statistic	55.92002
Durbin-Watson stat	0.922227	Prob(F-statistic)	0.000005

Corrección del error estándar:

Y	$\bar{Y}$	$Y-\bar{Y}$	R	$\bar{R}$	$R-\bar{R}$	$\hat{R}$	$\bar{\hat{R}}$	$\hat{R}-\bar{\hat{R}}$
503.70	847.45	-343.75	3.99	5.30	-1.31	3.81	5.30	-1.50
520.10	847.45	-327.35	3.60	5.30	-1.70	3.93	5.30	-1.37
560.30	847.45	-287.15	3.57	5.30	-1.73	3.99	5.30	-1.31
590.50	847.45	-256.95	3.72	5.30	-1.58	4.15	5.30	-1.16
632.40	847.45	-215.05	4.06	5.30	-1.24	4.34	5.30	-0.96
684.90	847.45	-162.55	4.22	5.30	-1.08	4.55	5.30	-0.75
749.90	847.45	-97.55	5.16	5.30	-0.14	4.67	5.30	-0.64
793.90	847.45	-53.55	5.07	5.30	-0.23	4.99	5.30	-0.32
864.20	847.45	16.75	5.59	5.30	0.29	5.39	5.30	0.09
930.30	847.45	82.85	6.85	5.30	1.55	5.59	5.30	0.28
977.10	847.45	129.65	7.37	5.30	2.07	5.94	5.30	0.63
1054.90	847.45	207.45	5.77	5.30	0.47	6.34	5.30	1.03
1158.00	847.45	310.55	5.85	5.30	0.55	6.89	5.30	1.58
1294.90	847.45	447.45	6.92	5.30	1.62	7.32	5.30	2.02
1396.70	847.45	549.25	7.81	5.30	2.51	7.66	5.30	2.36

$\hat{\beta}_{2SLS} = 221.0456$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N}\sum\left(y_1 - \hat{\beta}_{2SLS} y_2\right)^2 \qquad \hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{N}\sum\left(y_1 - \hat{\beta}_{2SLS} \hat{y}_2\right)^2$$

2856.56	162.45
2416.80	567.13
9214.54	8.74
8655.61	1.05
3573.65	9.47
5915.57	9.19
4338.87	1849.42
3.90	282.48
2173.40	10.46
67100.27	405.49
107047.35	112.06
10876.83	453.52
35989.28	1573.60
8116.14	1.95
23.43	790.47

$\hat{\sigma}_u^2 = 17886.8138$ $\qquad$ $\hat{\sigma}_w^2 = 415.8320$

$\hat{\sigma}_u = 133.7416$ $\qquad$ $\hat{\sigma}_w = 20.3920$

La corrección es entonces: $4.579381(133.7416/20.3920) = 30.034$.