Incidencia de los impuestos a las emisiones en el sector industrial*

Recibido: 15 de mayo de 2013 – Aceptado: 13 de julio de 2013

Gustavo Hernández†
Departamento Nacional de Planeación

Resumen

Siguiendo el artículo de Fullerton y Heutel (2007a) se construye un modelo de equilibrio general computable para una economía cerrada, el cual involucra a la polución, con el objetivo de analizar los efectos que tiene un impuesto a las emisiones de carbono sobre los precios y cantidades de la producción, así como los factores productivos. Se procede a calibrar el modelo con los datos de la industria colombiana, con base en la Encuesta Anual Manufacturera (EAM) y de emisiones de CO2 para el sector. Se encuentra que el imponer un impuesto a las emisiones reduce la polución, sin embargo, esto depende en gran parte de las complementariedades o sustituciones entre los factores de producción. Finalmente, se encuentra que la carga tributaria es soportada en gran parte por los consumidores, debido a un mayor precio, y al mercado de trabajo, por la recomposición de los factores dentro del modelo.

Clasificación JEL: C68, H22, H23, Q52.
Palabras clave: Modelos de Equilibrio General Computable, Incidencia Tributaria e Impuestos Ambientales.

Incidence of the pollution tax on the industrial sector

Abstract

Following Fullerton and Heutel (2007a) build a computable general equilibrium model for a closed economy, which involves pollution. In order to analyze the fiscal incidence of put

* Se agradecen los comentarios de Manuel Ramírez, Jesús Otero, Gabriel Piraquive y Néstor González. Los comentarios y errores son responsabilidad del autor y no comprometen a la institución en que trabaja.

† Subdirector de Estudios Sectoriales y Regulación de la Dirección de Estudios Económicos del DNP. Correo electrónico: ghernandez@dnp.gov.co

ISSN 0123-5362 - ISSNE 2145-454x

tax emissions for the industrial sector. One proceeds to calibrate the model with data from Colombian industry, based on the Annual Survey of Manufacturing and CO2 emissions for the sector. It is found that imposed a tax decrease pollution emissions, nevertheless depends mostly on the complementarities or substitution between factors. Finally, tax burden is supported in large part by consumers through a higher price, and labor market, by the restructuring of factors within the model.

JEL Classification: C68, H22, H23, Q52.
Keywords: Computable General Equilibrium, Tax Incidence and Environmental taxes.

1. Introducción

Bajo un modelo de equilibrio general, para una economía cerrada, simplificado, el cual consta de dos sectores con tres factores de producción donde el gobierno devuelve a los hogares los impuestos por medio de una transferencia de suma fija, se analiza la incidencia que tiene la imposición de un impuesto a la polución en la industria colombiana. Para poder responder a esta pregunta se hace un análisis de incidencia tributaria basado en Harberger (1962), en él se hace el álgebra necesaria para encontrar las expresiones de los precios relativos de los factores y la producción de los sectores en función de los impuestos, y luego se observa qué sucede al cambiar este impuesto. En este caso se asigna un impuesto a la polución, y se observan los canales de transmisión por medio de la economía. Para efectuar las simulaciones se soluciona el modelo mediante el método de Jones (1965), que se basa en la log-linealización de las ecuaciones del modelo, con lo cual se obtienen los crecimientos de las variables.

Esta aproximación tiene ventajas y desventajas. La principal ventaja es que es un modelo muy sencillo, que se permite, si se quiere, resolver con *lápiz y papel*, y prestar atención a cómo las interacciones del modelo, como la intensidad de los factores y las elasticidades, afectan los resultados. De otra parte, la mayor desventaja del modelo es la misma simplicidad de este, ya que se emplean muchos supuestos, lo cual puede llevar a que las estimaciones numéricas no puedan ser utilizadas. Sin embargo, el modelo sirve para entender la intuición detrás de los resultados numéricos cuantificados en modelos mucho más detallados.

Los resultados del modelo son bastante intuitivos. Se encuentra que a medida que la polución puede sustituirse por otros factores de producción, esta disminuye. Dado que se encuentra que el sector *sucio* es más intensivo en trabajo, se espera que sobre este factor recaiga la mayor parte de la carga tributaria, a pesar de que el capital es un factor más fácil de sustituir con la polución. La colocación del impuesto sobre la polución se transmite a los hogares vía un mayor precio del bien *sucio*, lo que implica una mayor demanda por parte del bien *limpio*. Finalmente, los efectos sobre las variables pueden ser pequeños, pero como se puede notar, la eliminación de la polución representa un 2,5 % de los costos dentro de la industria, por tanto, los efectos sobre las variables son los esperados.

El artículo consta de las siguientes partes: en la segunda se presentan las ecuaciones del modelo de equilibrio general, para luego mostrar los datos con los que el modelo es calibrado, elasticidades y parámetros. En la cuarta parte, se realiza el análisis de incidencia para un cambio en el impuesto a las emisiones, con lo cual se procede mostrar los resultados de algunas simulaciones con el modelo. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Modelo de equilibrio general con polución

El modelo sigue a Fullerton y Heutel (2010), el cual emplea el método de log-linealización de Jones (1965) para resolverlo. En esta economía hay dos sectores productivos X_1 y X_2, que producen los bienes finales perfectamente diferenciados. El sector X_1 usa como factores de producción a capital, K_1 y trabajo, L_1, y es denominado el sector *limpio*. El sector *sucio* X_2 usa también a capital y trabajo (K_2, L_2), adicionalmente, tiene un tercer insumo que es la polución, Z. Las funciones de producción tienen rendimientos constantes a escala, y pueden escribirse como:

$$X_1 = f_1(K_1, L_1)$$

$$X_2 = f_2(K_2, L_2, Z)$$

La oferta de los factores, capital y trabajo, es fija, y es igual a su demanda:[1]

$$K_1 + K_2 = \overline{K}$$

$$L_1 + L_2 = \overline{L}$$

Si se toma el diferencial total estas dos restricciones, se tiene que:

$$\hat{K}_1\lambda_{K,1} + \hat{K}_2\lambda_{K,2} = 0 \tag{1}$$

$$\hat{L}_1\lambda_{L,1} + \hat{L}_2\lambda_{L,2} = 0 \tag{2}$$

Donde las variables con ^ denotan el crecimiento de la variable[2] y donde λ_{ij} denota la proporción en el sector j del factor i.

Los productores, tanto del bien *limpio* como del bien *sucio*, enfrentan a un precio del capital r, y un precio del trabajo (salario) w.[3] Siguiendo a Mieszkowski

1 Debido a que hay una plena utilización de los factores. En el caso del trabajo, esto implica que el desempleo es fijo.

2 En este caso $\hat{K}_j = \dfrac{dK_j}{K_j}$ y $\hat{L}_j = \dfrac{dL_j}{L_j}$. También se puede interpretar como el cambio proporcional de la variable.

3 Se considera un impuesto *ad valorem*, con lo que el precio del capital sería $p_k = r(1 + \tau_k)$ y para el caso del trabajo $p_i = w(1 + \tau_i)$. Donde los cambios en estos precios serían, para el

(1967), la demanda de factores cambia de acuerdo con los cambios en los precios de los factores, de tal manera que, en el caso del bien *limpio*, se tiene que:[4]

$$\hat{K}_1 - \hat{L}_1 = \alpha_1\left[\left(\hat{w} + \hat{\tau}_l\right) - \left(\hat{r} + \hat{\tau}_K\right)\right] \tag{3}$$

Donde σ_1 es la elasticidad de sustitución entre trabajo y capital para el bien *limpio*.

De otra parte, los productores del bien *sucio* enfrentan los precios para tres factores de producción, por lo cual la sustitución de insumos es diferente. En primer lugar se considera que la empresa no enfrenta un precio para la polución excepto por un impuesto, $p_2 = \tau_2$, con lo que $\hat{p}_Z = \hat{\tau}_Z$ donde $\hat{\tau}_Z = \frac{d\tau_Z}{\tau_Z}$. Luego el impuesto por unidad de polución es un impuesto específico y no *ad-valorem*. Se define ε_{ij} como la elasticidad de sustitución entre los insumos i y j.[5] Esta elasticidad es positiva cuando un par de insumos son sustitutos, y negativa cuando un par de insumos son complementos. Adicionalmente, recuerde que por construcción: i) condición de simetría $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ii) $\varepsilon_{ii} \leq 0$, y ii) al menos una de las tres elasticidades precio-cruzadas debe ser negativa. Adicionalmente, $\theta_{2K} = r(1 + \tau_K)K_2/p_2X_2$ es la participación del costo de capital en los ingresos por las ventas.[6] Note que $\theta_{2K} = \tau_2Z/p_2X_2$ es el pago impositivo de las emisiones dentro de los ingresos del sector *sucio*.

La decisión de comprar los factores no es independiente entre sí, ya que hay una interrelación determinada por la función de producción y el nivel de

---

precio del capital $\hat{p}_k = r + \tau_k$, donde $\tau_k = \frac{d\tau_k}{1+\tau_k}$. De manera similar para el trabajo se tiene que $\hat{p}_l = w + \tau_l$, donde $\hat{\tau}_l = \frac{d\tau_l}{1+\tau_l}$.

4 Recuerde que:

$$\sigma_j = \frac{d\left(K_j / L_j\right) / \left(K_j / L_j\right)}{d(w/r)/(w/r)}$$

donde el diferencial del numerador es

$$d\left(K_j / L_j\right) / \left(K_j / L_j\right) = \frac{L_j dK_j - K_j dL_j}{L_j^2} \frac{L_j}{K_j} = \frac{dK_j}{K_j} - \frac{dL_j}{L_j} = \hat{K}_j - \hat{L}_j$$

y el del denominador es:

$$d(w/r)/(w/r) = \frac{rdw - wdr}{r_2} \frac{r}{w} = \frac{dw}{w} - \frac{dr}{r} = \hat{w} - \hat{r}$$

5 Véase Allen (1938).

6 De manera similar se puede definir:

$\theta_{1K} = r(1 + \tau_K)K_1/p_1X_1$ $\theta_{1L} = w(1 + \tau_K)L_1/p_1X_1$ $\theta_{2L} = w(1 + \tau_K)L_2/p_2X_2$ $\theta_{2Z} = p_2Z/p_2X_2$

producto deseado, por lo cual se pueden usar solamente dos de los cambios en la demanda de los factores, de tal manera que:[7]

$$\begin{aligned} \hat{K}_2 - \hat{Z} &= \theta_{2K}(\varepsilon_{KK} - \varepsilon_{ZK})(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \theta_{2L}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{ZL})(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ} - \varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z \\ \hat{L}_2 - \hat{Z} &= \theta_{2K}(\varepsilon_{LK} - \varepsilon_{ZK})(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \theta_{2L}(\varepsilon_{LL} - \varepsilon_{ZL})(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ} - \varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z \end{aligned} \tag{4}$$

Ya que con rendimientos constantes a escala los precios de los factores son iguales a los costos unitarios, el cambio en los precios de los factores es:[8]

$$\begin{aligned} \left(\hat{P}_1 + \hat{X}_1\right) &= \theta_{1K}\left[(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \hat{K}_1\right] + \theta_{1L}\left[(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \hat{L}_1\right] \\ \left(\hat{P}_2 + \hat{X}_2\right) &= \theta_{2K}\left[(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \hat{K}_2\right] + \theta_{2L}\left[(\hat{w} + \hat{\tau}_2) + \hat{L}_1\right] + \theta_{2Z}\left(\hat{\tau}_Z + \hat{Z}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

De otra parte, ya que la producción tiene rendimientos constantes a escala, las decisiones de producción de cada uno de los bienes pueden ser deducidas de acuerdo con:[9]

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \theta_{1K}\hat{K}_1 + \theta_{1L}\hat{L}_1 \\ \hat{X}_2 &= \theta_{2K}\hat{K}_2 + \theta_{2L}\hat{L}_2 + \theta_{2Z}\hat{Z} \end{aligned} \tag{6}$$

Finalmente, en las preferencias de los consumidores no hay una desutilidad por parte de la polución, debido a que se considera que la polución es separable dentro de la utilidad. Por lo tanto, el consumidor maximiza una función de utilidad homotética $U(X_1, X_2)$ sujeta a la restricción presupuestal $r(1+\tau_K)\bar{K} + w(1+\tau_L)\bar{L} + \tau_Z Z \geq P_1 X_1 + P_2 X_2$, donde todos los ingresos tributarios, T, son devueltos en forma de suma fija al consumidor. En este caso en particular, los ingresos fiscales son $T = r\tau_K\bar{K} + w\tau_L\bar{L} + \tau_Z Z$. Partiendo de la definición de la elasticidad de sustitución entre los bienes X_1 y X_2,[10] se puede obtener el cambio en la demanda como respuesta a un cambio en los precios:

---

7 De la ecuación (A. 2) se substrae la polución de cada uno de los factores.

8 Se hacen los arreglos necesarios a partir de A. 4.

9 Esto es reordenando (A. 7).

10 Recuerde que:

$$\sigma_u = \frac{d(X_1/X_2)/(X_2/X_1)}{d(P_1/P_2)/(P_2/P_1)}$$

$$\hat{X}_1 - \hat{X}_2 = \sigma_u\left(\hat{P}_2 - \hat{P}_1\right) \tag{7}$$

Hay que recordar que el cambio en los ingresos tributarios es dado por cambios en los impuestos al capital, al trabajo o a las emisiones, por lo que:

$$\hat{T} = \delta_K\left(\hat{r} + \hat{\tau}_K\right) + \delta_L\left(\hat{w} + \hat{\tau}_l\right) + \delta_Z\left(\hat{\tau}_K + \hat{Z}\right) \tag{8}$$

Donde δ_K, δ_L y δ_Z, son las respectivas participaciones de los impuestos al trabajo, al capital y a la polución, de cada uno de los factores.

Las ecuaciones de la (1) a la (8), presentan un sistema de 11 ecuaciones con doce incógnitas ($\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{X}_1, \hat{X}_2, w, r, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{T}, \hat{Z}$), donde se elige el precio del bien limpio como numerario, $P_1 = 0$. El sistema de ecuaciones entonces resuelve las once variables endógenas en función de los parámetros y de un cambio positivo en el impuesto a la polución.

3. Datos y calibración del modelo

Los datos para la calibración del modelo provienen de los datos de la industria de producción, empleo y energía tomados con base en la Encuesta Anual Manufacturera para el año 2005. Adicionalmente, los datos de los costos factoriales se hicieron con base en la Matriz de Contabilidad Social de 2005 construida por Corredor y Pardo (2008). Finalmente los datos de emisiones de CO2 equivalentes son tomados de Pardo (2010) y (2011), los cuales fueron proporcionados por la UPME. La valoración de las emisiones de CO2 es un poco más complicada ya que las industrias que emiten GEI no pagan por ello, por esta razón se recurrió a un precio de US$15 por tonelada métrica de CO2 equivalente.[11]

Los datos de emisiones de CO2 en el año 2005 para la industria fueron de 9187millones de toneladas, que equivalen a un 15,5 % de las emisiones totales para Colombia, en el mismo año. Para valorar las emisiones de CO2, entonces, se tomó como precio de referencia el de los mercados de CO2, que en promedio es de US$15 por tonelada,[12] a una tasa de cambio promedio de $2321 para el 2005, se tiene que su valoración esta en $319936, lo cual es equivalente a un 0,30 % de la producción industrial.

---

[11] Generalmente se utilizan unos precios de US$5 o US$15 o US$20, para este estudio se tomaron los precios de Hassett, Mathur y Metcalf (2009).

[12] Para 2008 el precio promedio de las toneladas de CO2 ha llegado a 20€, en la bolsa europea.

Con los datos a partir de la Clasificación Industrial Internacional Uniforme (CIIU) tres dígitos y con la valoración de las emisiones del CO2 para la industria manufacturera, se procedió a clasificar la industria entre sector *limpio* y *sucio*. Es importante aclarar que al decir sector *limpio* no implica que las industrias dentro del sector no emitan CO2, sino que emite una proporción mucho menor. Se encontró que las industrias con mayores emisiones como proporción de la producción eran intensivas en el factor energía. Esto significa que los sectores más intensivos en energía tienen una participación de la energía como factor productivo dentro de la producción de 19,2 %, en promedio, para el sector *sucio*, mientras que los sectores menos intensivos en energía, esto es, donde la proporción de la energía como factor a la producción es de 7,24 %, en promedio, son considerados sectores *limpios*. Lo que quiere decir que el sector sucio emite el 65,8 % de las emisiones de CO2 de la industria, mientras el restante 35,2 % es emitido por el sector *limpio*.

De acuerdo con esta clasificación entonces se procede a la calibración de los parámetros para el modelo. Para la consecución de las participaciones de las remuneraciones en la producción (θ_{1k}, θ_{1L}, θ_{2k}, θ_{2L}, θ_{2Z}) tanto para el sector *limpio* como sector *sucio*, se tomó como referencia la Matriz de Contabilidad Social de 2005. A partir de ella se encuentra que la remuneración a asalariados dentro de la producción bruta para el sector *limpio* es el 49,7 % para el sector sucio y del 40,10 % para el sector limpio de la producción. Con estos datos y conociendo que la participación de las emisiones en la producción dentro del sector sucio (θ_{2Z} = 2,5 %), se tiene que las participaciones del capital son de 47,86 % para el sector sucio y de 59,9 % para el sector limpio en la producción.[13]

Con los datos de la EAM para empleo (número de trabajadores, tanto temporales como permanentes), se encuentra que la participación del factor trabajo en la producción es del sector *sucio* ($\lambda_{L,2}$), es de 35,7 % y de 64,3 % para el sector *limpio* ($\lambda_{L,1}$). De otra parte, para el capital,[14] se tiene que la proporción en el producto es de 81,7 % para el sector *limpio* ($\lambda_{K,1}$) y de 18,3 % para el sector *sucio* ($\lambda_{K,2}$). Ahora bien, hay que anotar que en diferentes estudios (Antweiler, Copeland y Taylor, 2001; Fullerton y Heutel, 2007a y 2007b; y Muthukumara y Wheeler, 1997) encuentran que el sector *sucio* es más intensivo en capital en los países industrializados.

Los parámetros utilizados para inicializar el modelo se resumen en la tabla 1. Con estos datos se puede empezar a realizar la calibración de las elasticidades necesarias para encontrar el escenario base del modelo. Hay que tener en cuenta que para las elasticidades de sustitución del sector sucio no hay eviden-

---

13 Recuerde que $\theta_{1K} + \theta_{1L} = 1$ y $\theta_{2K} + \theta_{2L} + \theta_{1Z} = 1$.

14 Con los datos de la EAM se hizo un cálculo del capital basado en Eslava, et. al. (2004).

cia empírica de que hayan sido estimadas, bajo la definición adoptada, por esta razón son deducidas de acuerdos con algunos supuestos o se hace un análisis de sensibilidad de acuerdo con el objetivo del trabajo.

Tabla 1. Parámetros de intensidad de factores en la industria

Sector "limpio"	Sector "sucio"
$\lambda_{K,1} = 81{,}7\%$	$\lambda_{K,2} = 18{,}3\%$
$\lambda_{L,1} = 64{,}3\%$	$\lambda_{L,2} = 35{,}7\%$
$\theta_{1K} = 59{,}9\%$	$\theta_{2K} = 47{,}8\%$
$\theta_{1L} = 40{,}1\%$	$\theta_{2L} = 49{,}7\%$
	$\theta_{2Z} = 2{,}5\%$

Fuente: Elaboración del autor con base en EAM y Matriz de Contabilidad Social 2005.

Para la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo para el sector limpio (σ_1), se toma inicialmente un valor de 0,8, que es lo encontrado por Claro (2003), y que en promedio es muy parecido a lo calculado por Arango, Gracia y Hernández (1998), que encuentran unas elasticidades de capital y trabajo entre 1,5[15] y 0,06.[16] Más recientemente se ha encontrado una elasticidad de sustitución factorial alrededor de 0,7, la cual depende mucho del sector industrial sobre el cual se realice la estimación (Arango y Rojas, 2004). Implícitamente se asume una función tipo CES para la industria. Sin embargo, en la mayoría de trabajos se asume que $\sigma_1 = 1$, esto es una relación tecnológica Cobb-Douglas (Babiker, Metcalf, y Riley, 2003; Fullerton y Heutel, 2007a, 2007b y 2010). De otra parte, la elasticidad de sustitución en el consumo (σ_U) se asume igual a uno, que es el valor usado por Fullerton y Metcalf (2001).

Finalmente quedan por encontrar los valores de ε_{ij} dentro de la producción del sector *sucio*, los cuales son nueve parámetros que deben ser encontrados. Por la condición de simetría ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) estos se reducen a seis parámetros.[17] Adicionalmente, otros tres parámetros pueden ser calibrados, ya que la relación de las elasticidades de sustitución de Allen muestra que $\eta_{iK} + \eta_{iL} + \eta_{iZ} = 0$ con lo cual solo quedan tres parámetros por obtener ε_{KL}, ε_{KZ} y ε_{LZ}. Dado que no existe una elasticidad entre emisiones de CO2 con trabajo o capital (ε_{KZ} y ε_{LZ}), entonces se realiza un análisis de sensibilidad, para esto se toman elasticidades entre -1,0, complementariedad ente los factores, hasta el valor de 1,0, sustituibilidad entre factores, para observar que tan sensibles pueden ser los cambios en los

15 Calculada a partir de una función Generalizada Leontieff.

16 Calculada a partir de una función Translogaritmica.

17 Esto es, $\varepsilon_{KL} = \varepsilon_{LK}$, $\varepsilon_{KZ} = \varepsilon_{ZK}$ y $\varepsilon_{LZ} = \varepsilon_{ZL}$

resultados. Para la elasticidad entre capital y trabajo (ε_{KL}) entonces se asume que es igual a la obtenida para el sector "limpio" (σ_1).[18]

4. Análisis de incidencia

El análisis de incidencia fiscal se basa en lo que sucede con los cambios de los precios relativos (w/r y p_1/p_2) y de las cantidades X_1/X_2. De esta manera, todo se reduce al siguiente sistema de ecuaciones:[19]

$$\hat{X}_1 - \hat{X}_2 = \sigma_u \left(\hat{P}_2 - \hat{P}_1\right) \tag{9}$$

$$\hat{P}_2 - \hat{P}_1 = (\theta_{1L} - \theta_{2L})\left[(\hat{w} - \hat{r}) + (\hat{\tau}_l - \hat{\tau}_K)\right] - \theta_{2Z}\left[\hat{\tau}_Z - (\hat{r} + \hat{\tau}_K)\right] \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda_{L,1} - \lambda_{K,1})\left(\hat{X}_1 - \hat{X}_2\right) = (1 + \lambda_{L,1})\left\{\sigma_1\left[(\hat{w} - \hat{r}) + (\hat{\tau}_l - \hat{\tau}_K)\right]\right\} + \lambda_{L,1}\\ &\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK} - \varepsilon_{LK})(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \theta_{2L}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{LL})(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \theta_{2L}(\varepsilon_{KZ} - \varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\} +\\ &(\lambda_{L,1} - \lambda_{K,1})\left\{\left[\theta_{2K}(\varepsilon_{LK} - \varepsilon_{ZK})(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \theta_{2L}(\varepsilon_{LL} - \varepsilon_{ZL})(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ} - \varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right]\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

Este sistema se encuentra en función de los parámetros (λ_{ij} y θ_{ij}), de las elasticidades de sustitución de los factores (σ_1 y ε_{ii}) y los impuestos (τ_j). A partir de estas tres ecuaciones se puede encontrar gráficamente qué sucede al mover uno de los impuestos, en este caso en particular, el impuesto a la polución. La ecuación (9) es la demanda de la economía, (10) y (11) se utilizan para construir la oferta de la economía, luego se puede representar este sistema de ecuaciones gráficamente (figura 1).

---

18 Sin embargo, otros ejercicios de simulación se realizaron con una elasticidad $\varepsilon_{KL} = 0.5$, Mooij y Bovenberg (1998) y Fullerton y Heutel (2010), pero no cambian cualitativamente los resultados del modelo.

19 Véase Apéndice B, para la obtención de las ecuaciones.

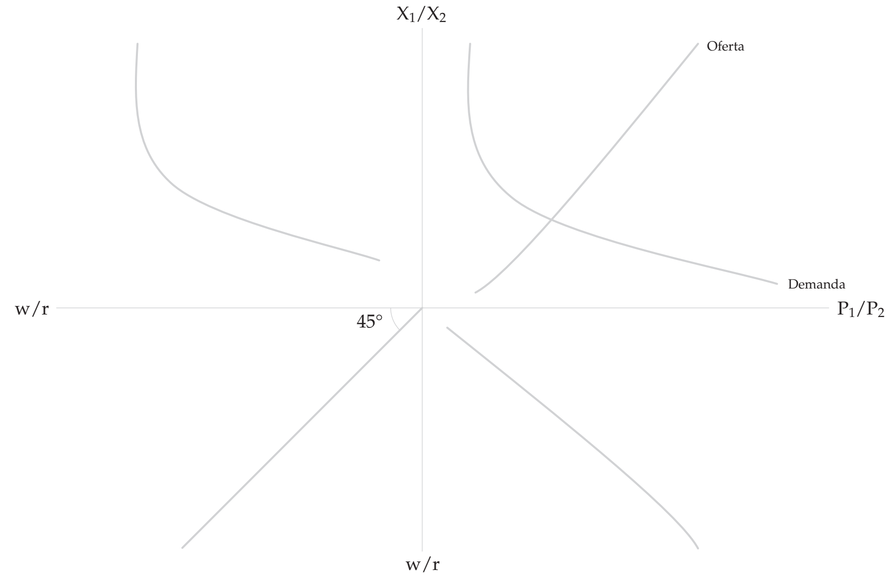

Figura 1. Equilibrio en el Mercado de Factores
Fuente: Adaptado de Fullerton y Metcalf (2002).

En este caso particular, se quiere analizar cuál es el efecto de un aumento al impuesto a la polución $\left(\hat{\tau}_Z \neq 0\right)$ mientras que los otros impuestos se mantienen constantes $\left(\hat{\tau}_l = \hat{\tau}_K = 0\right)$. Para esto se simplifica el sistema de ecuaciones compuesto por (9), (10) y (11) de la siguiente manera:

$$\hat{X}_1 - \hat{X}_2 = \sigma_u\left(\hat{P}_2 - \hat{P}_1\right) \tag{9'}$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 = \left(\theta_{1L} - \theta_{2L}\right)\left(\hat{w} - \hat{r}\right) - \theta_{2Z}\left(\hat{\tau}_Z - \hat{r}\right) \tag{10'}$$

$$\begin{aligned}\left(\lambda_{L,1} - \lambda_{K,1}\right)\left(\hat{X}_1 - \hat{X}_2\right) &= \left(1 + \lambda_{L,1}\right)\left[\sigma_1\left(\hat{w} - \hat{r}\right)\right] + \lambda_{L,1}\left\{\theta_{2K}\left(\varepsilon_{KK} - \varepsilon_{LK}\right)\hat{r} + \right.\\ &\theta_{2L}\left(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{LL}\right)\hat{w} + \theta_{2L}\left(\varepsilon_{KZ} - \varepsilon_{ZZ}\right)\hat{\tau}_Z\right\} + \left(\lambda_{L,1} - \lambda_{K,1}\right)\left\{\left[\theta_{2K}\left(\varepsilon_{LK} - \varepsilon_{ZK}\right)\hat{r} + \right.\right.\\ &\left.\left.\theta_{2L}\left(\varepsilon_{LL} - \varepsilon_{ZL}\right)\hat{w} + \theta_{2Z}\left(\varepsilon_{LZ} - \varepsilon_{ZZ}\right)\hat{\tau}_Z\right]\right\}\end{aligned} \tag{11'}$$

El sistema ahora compuesto por (9′), (10′) y (11′) es representado en la figura 2 (líneas continuas). Ahora, como se puede observar la economía está en el equilibrio E_0 y cambia al equilibrio E_1, al incrementarse el impuesto a la polución (líneas punteadas). Esto se debe a que el incremento en el impuesto a las emisiones hace que el precio del bien *sucio* sea mayor, al ser la polución un factor más caro ("internalizar la externalidad"), por lo tanto se afectan las decisiones de utilización de los factores. De esta manera, dado que la oferta de factores es fija (capital y trabajo), entonces un incremento (disminución) del factor más intensivo en el sector sucio produce una disminución (incremento) en la utilización del factor más intensivo, en el sector *limpio*. Al ser más intensivo el sector *sucio* en trabajo, hay un ajuste en el precio de los factores (cambio en precios relativos), haciendo más caro el trabajo[20] por lo cual la producción del bien *sucio* es menor, al ser más caros sus costos, y la oferta relativa se mueve a la derecha. Con lo que se llega al equilibrio E_1 de la figura 2.

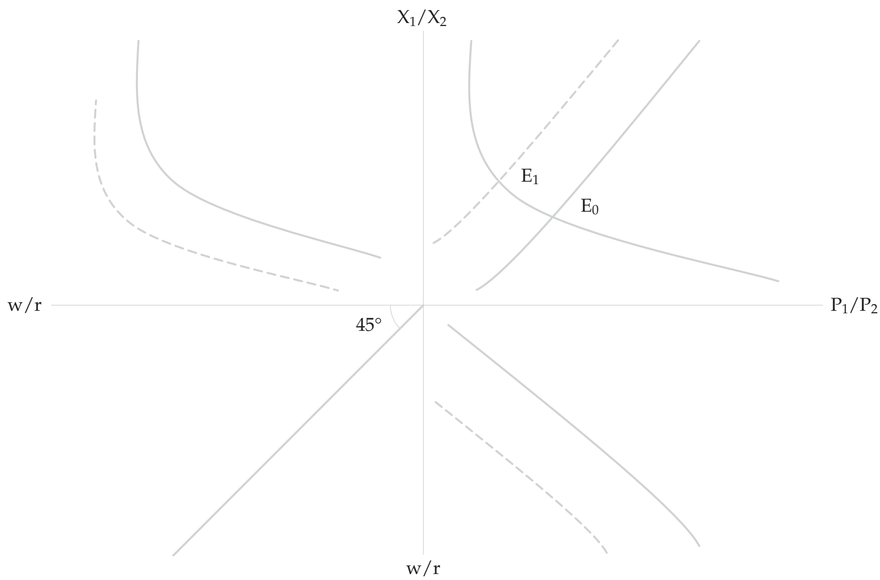

Figura 2. Incidencia del impuesto a la contaminación
Fuente: Elaboración del autor.

5. Resultados de las simulaciones

Con base en el sistema de ecuaciones representado de la (1) a la (8) y los datos de la tabla 1, entonces se procede a realizar la simulación del modelo. Para esto se realiza un incremento del 10,0 % en el impuesto a la polución. Antes de presentar

20 Véase ecuaciones 11b y 11c de Fullerton y Heutel (2007).

los resultados, se construye un índice de precios de la economía para presentar los cambios en precios relativos en términos reales. Para esto se asume que $P = \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2$, que en este caso ω_1 es de 85,0 %.[21] Los resultados del análisis de sensibilidad, bajo diferentes valores de las elasticidades cruzadas de Allen, son presentados en la tabla 2, para cambios en precios y cantidades, tanto del sector limpio como del sector sucio.

Primero se consideran los resultados sobre los precios. No hay que olvidar que P_1 es el numerario, por tanto su cambio siempre va a ser de cero. Como se ve el incremento se encuentra alrededor de un 2,32 % (segunda columna de la tabla 2), lo cual muestra que el sector *sucio* está pasando el costo adicional del impuesto al consumidor vía precios, ya que al aumentar el impuesto un 10,0 % su precio se incrementa en un 2,5 % $(\theta_{2Z} * \hat{\tau}_Z)$. Por tanto, los consumidores que tienen un mayor gasto en consumo del bien *sucio* serían los más perjudicados que el resto de consumidores.

Tabla 2. Análisis de sensibilidad de un incremento de 10 % en el impuesto a las emisiones

ε_{KZ}	ε_{LZ}	$\hat{P}_2$	$\hat{w}$	$\hat{r}$	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{Z}$
-1,0	-1,0	0,236 %	-0,049 %	0,033 %	0,094 %	-0,142 %	5,013 %
-1,0	0,0	0,245 %	0,002 %	-0,001 %	0,089 %	-0,156 %	4,630 %
-1,0	1,0	0,254 %	0,052 %	-0,035 %	0,084 %	-0,170 %	4,297 %
0,0	-1,0	0,230 %	-0,083 %	0,056 %	0,067 %	-0,163 %	0,239 %
0,0	0,0	0,239 %	-0;032 %	0,021 %	0,062 %	-0,178 %	-0,178 %
0,0	1,0	0,248 %	0,019 %	-0,012 %	0,056 %	-0,192 %	-0,543 %
1,0	-1,0	0,224 %	-0,117 %	0,078 %	0,041 %	-0,184 %	-4,514 %
1,0	0,0	0,233 %	-0,065 %	0,044 %	0,035 %	-0,199 %	-4,964 %
1,0	1,0	0,242 %	-0;015 %	0;010 %	0,029 %	-0,213 %	-5,363 %

Fuente: Elaboración del autor.

De otra parte, el cambio en las emisiones de CO2 (tabla 2, última columna) varía mucho más, pasa de un incremento de 5,0 % a una caída de 5,3 %, va disminuyendo más a medida que el valor de ε_{LZ} se incrementa (Gráfico 1). Hay dos aspectos a considerar en este resultado. El primero, que la colocación de un impuesto a las emisiones no necesariamente disminuye la polución, esto se debe

[21] Note que $\hat{P} = \omega_2 \hat{P}_2$, ya que se considera a P_1 como el numerario.

al efecto conocido como *carbón leakage,*[22] lo que hace que una fuerte regulación en el sector *sucio* incremente los costos del sector, permitiendo así que la producción pueda ser realizada bajo un sector *sucio no regulado*, y esto compensa el efecto deseado. En segundo lugar, se observa cómo, mientras más complementarios son los factores de producción con respecto a la polución —por ejemplo, la utilización de tecnologías más contaminantes—, los efectos sobre la polución son menores, por lo que a una mayor sustitución entre los factores[23] y utilización de tecnologías nuevas, la polución es más fácil de sustituir por capital y trabajo, luego las emisiones van a disminuir más rápidamente. En efecto, los valores de las elasticidades cruzadas van a ser importantes tanto para los resultados de incidencia, como para el impacto de la política sobre el cambio en emisiones.

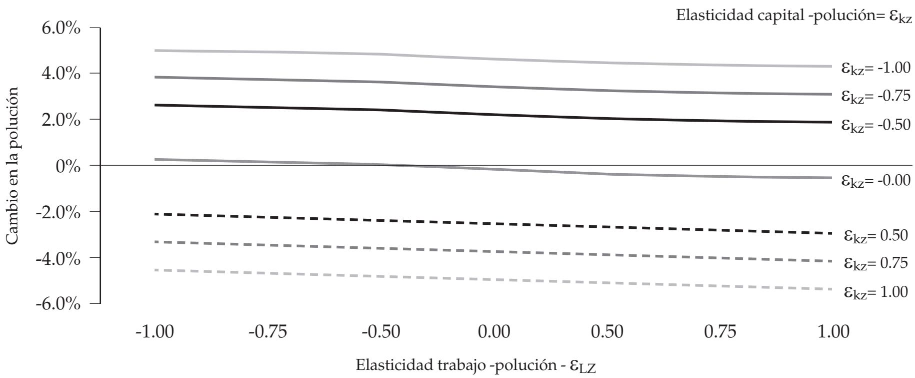

Gráfico 1. Impuesto a las emisiones y polución
Fuente: Elaboración del autor.

Se puede observar en el Gráfico 2 cómo los salarios aumentan más que el precio del capital con respecto al numerario, cuando se coloca el impuesto sobre la polución. Esto se debe a que el sector "sucio" es más intensivo en trabajo que en capital (tabla 1), por lo tanto al requerir una mayor sustitución de trabajo por polución, el precio del trabajo se vuelve más caro con respecto al precio del capital, lo que implica que el trabajo sea quien tenga que soportar una mayor parte de la carga fiscal.

22 Véase Fullerton, Karney y Baylis (2011) para más detalles.

23 Observe que en el Gráfico 1 a medida que aumenta ε_{LZ} también es mayor la disminución de la contaminación.

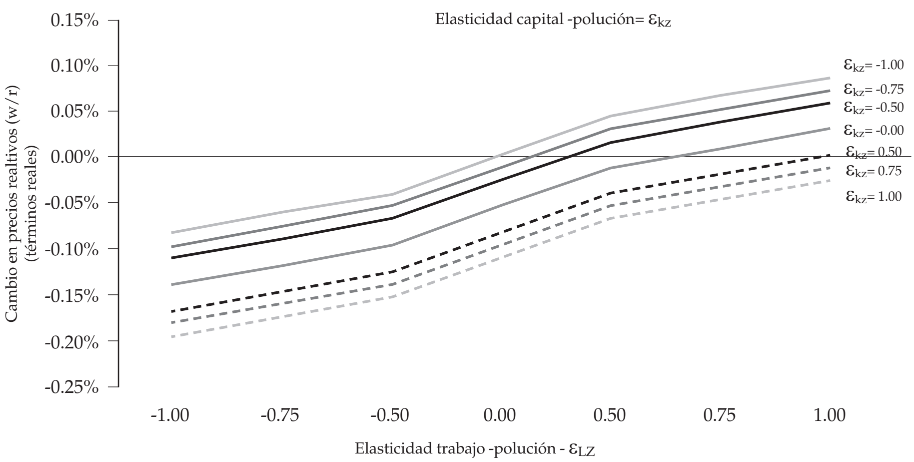

Gráfico 2. Impacto del impuesto a las emisiones sobre los precios de los factores

Fuente: Elaboración del autor.

Los cambios en precios relativos de los factores implican que las decisiones de demanda de factores cambien, lo cual afecta las decisiones de producción de las empresas, esto lleva a una recomposición de los factores de producción. Como se puede observar en el Gráfico 3, era de esperarse que al aumentar los costos del sector *sucio*, la producción del sector disminuya, independientemente de la elasticidad cruzada de los factores.

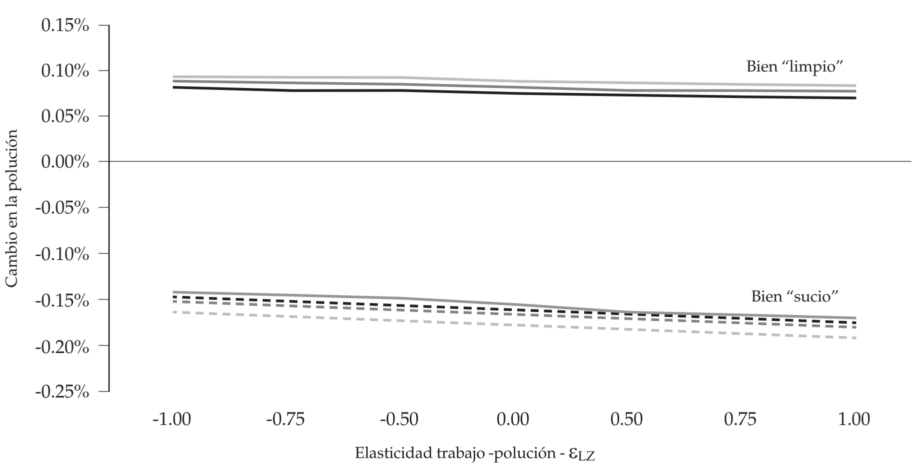

Gráfico 3. Impacto del impuesto a las emisiones sobre la producción

Fuente: Elaboración del autor.

6. Comentarios finales

Con un modelo muy sencillo de equilibrio general computable (un sistema de 10 ecuaciones con 11 incógnitas) se presenta una primera aproximación de los efectos de un cambio en los impuestos a las emisiones de CO2 en la industria colombiana. Para esto, se realiza un análisis de incidencia tributaria basado en Harberger (1962). La sencillez del modelo a la vez que es una ventaja, es muy fácil entender y seguir los canales de transmisión de los impuestos, es a su vez su mayor desventaja, ya que se utilizan muchos supuestos para tener un modelo resumido.

Dentro de los resultados más importantes se puede destacar que los resultados del modelo no son muy sensibles a la incertidumbre que existe entre la sustitución o complementariedad, entre el capital y polución o trabajo y polución. Ya que como se puede observar: i) la polución disminuye a medida que esta es más sustituta con los demás factores de producción, ii) hay una disminución en la producción del sector *sucio* con respecto al sector *limpio*, por los mayores costos, iii) la carga tributaria es soportada por los consumidores, un incremento en el índice de precios, y el mercado laboral, ya que el sector "sucio" es más intensivo en trabajo que el sector *limpio*.

Hasta el momento se ha considerado que solo el cambio en los impuestos a la polución afecta a la industria, sin embargo, uno de los debates más importantes sobre este tipo de impuesto es explorar la hipótesis del llamado "doble dividendo", lo que significa que al colocar un impuesto sobre la emisión de gases invernadero, además de mejorar el medio ambiente, mejora el bienestar del individuo, la distribución del ingreso, aumento del producto o crecimiento... Detrás de esto se asume que el beneficio secundario se debe a que este nuevo impuesto reemplaza a unos impuestos más distorsionantes, manteniendo el déficit fiscal intacto. El modelo puede ser extendido para evaluar esta hipótesis, como lo hace Bovenberg y de Mooij (1998) y Carbone y Smith (2006), al involucrar dentro de la función de utilidad explícitamente la decisión entre ocio y consumo, además de la calidad del aire.

Aunque es claro que un impuesto sobre las emisiones afecta a los diferentes sectores de la economía de diferente forma, un modelo más complejo que este podría dar resultados con magnitudes mayores. El modelo descrito en este trabajo muestra que, tanto las intensidades de los factores como las elasticidades de sustitución son clave para el impacto de la incidencia tributaria. En resumen, el modelo presentado aquí puede servir como la intuición detrás de los resultados de modelos más elaborados.

Referencias

Allen, R. (1938). *Mathematical Analysis for Economists.* New York: St. Martin's.

Antweiler, W., B. Copeland, y M. Taylor (2001). Is Free Trade Good for the Environment? *American Economic Review 91*(4), 877-908.

Arango, C y M. Rojas (2004). Demanda laboral y reforma comercial en el sector manufacturero colombiano: 1977-1999. *Ensayos Sobre Política Económica* 44, 96-154.

Babiker, M., G. Metcalf, y J. Riley (2003). Tax distortions and global climate policy. *Journal of Environmental Economics and Management* 46, 269-287.

Bovenberg, L. y R. de Mooij (1998). Environmental taxes, international capital mobility and inefficient tax systems: Tax burden vs. tax shifting. *International Tax and Public Finance 5*(1), 7-39.

Carbone, J. y K. Smith (2008). Evaluating policy interventions with general equilibrium externalities. *Journal of Public Economics* 92(5-6), 1254-1274.

Claro, S. (2003). A cross-country estimation of the elasticity of substitution between labor and capital in manufacturing industries. *Cuadernos de Economía* 40, 239-257.

Eslava, M., J. Haltiwanger, A. Kugler, y M. Kugler (2004). The effects of structural reforms on productivity and profitability enhancing reallocation: Evidence from Colombia. *Journal of Development Economics 75*(2), 333-372.

Fullerton, D. y G. Heutel (2007a). The General Equilibrium Incidence of Environmental Taxes. *Journal of Public Economics 91*(3-4), 571-591.

Fullerton, D. y G. Heutel (2007b). Who bears the burden of a tax on carbon emissions in Japan. *Enviroemntal Economics and Policy Studies* (8), 255-270.

Fullerton, D. y G. Heutel (2010). Analytical General Equilibrium Effects of Energy Policy on Output and Factor Prices. B.E. *Journal of Economic Analysis and Policy 10*(2), 1-24.

Fullerton, D. y G. Metcalf (2001). Environmental controls, scarcity rents, and pre-existing distortions. *Journal of Public Economics* 80, 249-267.

Fullerton, D. y G. Metcalf (2002). Tax incidence. In: A. Auerbach y M. Feldstein (Eds.), *Handbook of Public Economics*. Amsterdam: North Holland.

Fullerton, D., D. Karney D. y K. Baylis (2011). Negative Leakage. *National Bureau of Economic Research, Working Paper* 17001.

Harberger, A. (1962). The Incidence of the Corporation Income Tax. *Journal of Political Economy 70*(3), 215-240.

Hassett, K., A. Mathur, y G. Metcalf (2009). The incidence of a U.S. carbon tax: A lifetime and regional analysis. *Energy Journal*30(2), 155-177.

IDEAM (2010). *Segunda Comunicación Nacional ante la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático*. Recuperado de https://documentacion.ideam.gov.co/openbiblio/Bvirtual/021658/021658.htm

Jones, R. (1965). The structure of simple general equilibrium models. *Journal of Political Economy* 73, 557-72.

Mieszkowski, P. (1967). On the Theory of Tax Incidence. *The Journal of Political Economy 75*(3), 250-262.

Mieszkowski, P. (1972). The property tax: an excise tax or a profits tax? *Journal of Public Economics 1*(1), 73-96.

Muthukumara, M. y D. Wheeler (1997). In Search of Pollution Havens?: Dirty Industry Migration in the World Economy. *World Bank, Working Paper* 16.

Pardo, C. (2010). Factors Influencing Energy Efficiency in the German and Colombian Manufacturing Industries. En "Energy Efficiency", Edt. Jenny Palm, InTech. Recuperado de http://www.intechopen.com/articles/show/title/factors-influencing-energy-efficiency-in-the-german-and-colombian-manufacturing-industries.

Pardo, C. (2011). Energy efficiency development in German and Colombian non-energy-intensive sectors: a non-parametric analysis. *Energy Efficiency* 4, 115-131.

Pardo, O. y D. Corredor (2008). Matrices de Contabilidad Social 2003, 2004, 2005 para Colombia. *Departamento Nacional de Planeación*, *Archivos de Economía* 339.

Rodriguez, J. (2008). Fundamentos para el uso de instrumentos fiscales en la política ambiental: Una aproximación al caso colombiano. DIAN, *Oficina de Estudios Económicos, Cuaderno de Trabajo* 033.

Anexo A: derivación de las ecuaciones del modelo

Para encontrar (4), como cambian los insumos, se sigue a Mieszkowski (1972). Entonces se parte de que las demandas de factores puede ser representada como:

$$\begin{aligned} K_2 &= K_2(r,w,p_Z,X_2) \\ L_2 &= L_2(r,w,p_Z,X_2) \\ Z &= Z(r,w,p_Z,X_2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Realizando la diferenciación total de cada una de las demandas de factores y dividiendo de acuerdo con el insumo correspondiente, se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{K}_2 &= \eta_{KK}\hat{r} + \eta_{KL}\hat{w} + \eta_{KZ}\hat{p}_Z + \hat{X}_2\\ \hat{L}_2 &= \eta_{LK}\hat{r} + \eta_{LL}\hat{w} + \eta_{LZ}\hat{p}_Z + \hat{X}_2\\ \hat{Z} &= \eta_{ZK}\hat{r} + \eta_{ZL}\hat{w} + \eta_{ZZ}\hat{p}_Z + \hat{X}_2\end{aligned} \tag{A.2}$$

Donde η_{ij} es la elasticidad de la demanda del insumo *i* con respecto al insumo *j*. De acuerdo con Mieszkowski (1972) η_{ij} se puede definir como $\varepsilon_{ij}\theta_{2j}$. Note que η_{ij} no necesariamente es igual a η_{ij}. Igualmente, ya que $\varepsilon_{ij} \leq 0$ entonces $\eta_{ij} \leq 0$, y que $\eta_{iK} + \eta_{iL} + \eta_{iZ} = 0$, luego alguna de las elasticidades precio cruzadas debe ser negativa.

De otra parte, para obtener cómo cambian los precios de los productos, esto es (5), se parte de que bajo rendimientos constantes a escala el valor del producto debe ser igual a la suma del costo unitario de los factores:

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{r(1+\tau_K)K_1}{X_1} + \frac{w(1+\tau_L)L_1}{X_1}\\ P_2 &= \frac{r(1+\tau_K)K_2}{X_2} + \frac{w(1+\tau_L)L_2}{X_2} + \frac{p_z Z}{X_2}\end{aligned} \tag{A.3}$$

Tomando el diferencial total de (A.3), se tiene que:

$$\begin{aligned}&X_1 dP_1 + P_1 dX_1 = (1+\tau_K)K_1 dr + r(1+\tau_K)dK_1 + rd\tau_K K_1 +\\ &(1+\tau_L)L_1 dw + w(1+\tau_L)dL_1 + wL_1 d\tau_L\\ &X_2 dP_2 + P_2 dX_2 = (1+\tau_K)K_2 dr + r(1+\tau_K)dK_2 + rd\tau_2 K_2 +\\ &(1+\tau_L)L_2 dw + w(1+\tau_L)dL_2 + wL_2 d\tau_L + Zdp_Z + p_Z dP\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P_1X_1\frac{dP_1}{P_1} + P_1X_1\frac{dX_1}{X_1} = r(1+\tau_K)K_1\frac{dr}{r} + r(1+\tau_K)K_1\frac{dK_1}{K_1} + r(1+\tau_K)K_1\frac{d\tau_K}{(1+\tau_K)} +\\ &w(1+\tau_L)L_1\frac{dw}{w} + w(1+\tau_L)L_1\frac{dL_1}{L_1} + w(1+\tau_L)L_1\frac{d\tau_L}{(1+\tau_L)}\\ &P_2X_2\frac{dP_2}{P_2} + P_2X_2\frac{dK_2}{K_2} = r(1+\tau_K)K_2\frac{dr}{r} + r(1+\tau_K)K_2\frac{dK_2}{K_2} + r(1+\tau_K)K_2\frac{d\tau_K}{(1+\tau_K)} +\\ &w(1+\tau_L)L_2\frac{dw}{w} + w(1+\tau_L)L_2\frac{dL_2}{L_2} + w(1+\tau_L)L_2\frac{d\tau_L}{(1+\tau_L)} + P_Z Z\frac{dp_Z}{p_Z} + P_Z Z\frac{dZ}{Z}\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}&P_1X_1\left(\hat{P}_1 + \hat{X}_1\right) = r(1+\tau_K)K_1\left[(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \hat{K}_1\right] + w(1+\tau_L)L_1\left[(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \hat{L}_1\right]\\ &P_2X2\left(\hat{P}_2 + \hat{X}_2\right) = r(1+\tau_K)K_2\left[(\hat{r} + \hat{\tau}_K) + \hat{K}_2\right] + w(1+\tau_L)L_2\left[(\hat{w} + \hat{\tau}_l) + \hat{L}_2\right] + p_Z Z\left(\hat{p}_Z + \hat{Z}\right)\end{aligned}$$

Después de hacer los arreglos necesarios se tiene (5).

Finalmente, para obtener (6), se toma el diferencial total de las funciones de producción de cada uno de los sectores:

$$\begin{aligned} dX_1 &= dK_1 \frac{\partial X_1}{\partial K_1} + dL_1 \frac{\partial X_1}{\partial L_1} \\ dX_2 &= dK_2 \frac{\partial X_2}{\partial K_2} + dL_2 \frac{\partial X_2}{\partial L_2} + dZ \frac{\partial X_2}{\partial Z} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Ahora bien, bajo competencia perfecta los precios de los factores son iguales a las productividades marginales, por lo que:

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial X_1}{\partial K_1} &= r(1+\tau_K) = P_1 \frac{\partial X_2}{\partial K_2} \\ P_1 \frac{\partial X_1}{\partial L_1} &= w(1+\tau_L) = P_2 \frac{\partial X_2}{\partial L_2} \\ P_2 \frac{\partial X_2}{\partial Z} &= p_Z = \tau_Z \end{aligned} \tag{A.6}$$

Entonces, reemplazando las productividades marginales (A.6) en (A.5):

$$\begin{aligned} dX_1 &= dK_1 \frac{r(1+\tau_K)}{P_1} + dL_1 \frac{w}{P_1} \\ dX_2 &= dK_2 \frac{r(1+\tau_K)}{P_2} + dL_2 \frac{w}{P_2} + dZ \frac{P_Z}{P_2} \\ P_1 X_1 \frac{dX_1}{X_1} &= r(1+\tau_K) K_1 \frac{dK_1}{K_1} + w(1+\tau_L) L_1 \frac{dL_1}{L_1} \\ P_2 X_2 \frac{dX_2}{X_2} &= r(1+\tau_K) K_2 \frac{dK_2}{K_2} + w(1+\tau_L) L_2 \frac{dL_2}{L_2} + P_Z Z \frac{dZ}{Z} \end{aligned} \tag{A.7}$$

Haciendo los arreglos necesarios llegamos a (6).

Anexo B: Análisis de incidencia impositiva

Para la primera ecuación del análisis de incidencia se toma la ecuación (7). Para encontrar la segunda ecuación del sistema (10), se sustituye (6) en (5).

$$\begin{gathered}\left(\hat{P}_1+\theta_{1K}\hat{K}_1+\theta_{1L}\hat{L}_1\right)=\theta_{1K}\left[\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\hat{K}_1\right]+\theta_{1L}\left[\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)+\hat{L}_1\right]\\ \left(\hat{P}_2+\theta_{2K}\hat{K}_2+\theta_{2L}\hat{L}_2+\theta_{2Z}\hat{Z}\right)=\theta_{2K}\left[\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\hat{K}_2\right]+\theta_{2L}\left[\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)+\hat{L}_2\right]+\theta_{2Z}\left(\hat{\tau}_Z+\hat{Z}\right)\\ \hat{P}=\theta_{1K}\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{1L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)\\ \hat{P}=\theta_{2K}\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{2L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)+\theta_{2Z}\hat{\tau}_Z\end{gathered} \tag{B.1}$$

Ahora se sustrae la segunda ecuación de la primera en (B.1), con lo que:

$$\hat{P}_1-\hat{P}_2=\theta_{1K}\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{1L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)-\left\{\theta_{2K}\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{2L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)+\theta_{2Z}\hat{\tau}_Z\right\} \tag{B.2}$$

Se debe recordar que $\theta_{1K}+\theta_{1L}=1$ y $\theta_{2K}+\theta_{2L}+\theta_{2Z}=1$, luego:

$$\begin{gathered}\hat{P}_1-\hat{P}_2=\left(1-\theta_{1L}\right)\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{1L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)-\\ \left\{\left(1-\theta_{2L}-\theta_{2Z}\right)\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{2L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)+\theta_{2Z}\hat{\tau}_Z\right\}\end{gathered} \tag{B.3}$$

$$\begin{gathered}\hat{P}_1-\hat{P}_2=\left(1-\theta_{1L}\right)\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{1L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)-\\ \left\{\left(1-\theta_{1L}-\theta_{2Z}\right)\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{2L}\left(\hat{w}+\hat{\tau}_l\right)+\theta_{2Z}\hat{\tau}_Z\right\}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\hat{P}_1-\hat{P}_2=\left(\hat{r}+\hat{\tau}_K\right)+\theta_{1L}\left[\left(\hat{w}-\hat{\tau}_l\right)+\left(\hat{\tau}_l-\hat{\tau}_K\right)\right]-\\ \left\{\left(\hat{\tau}-\hat{\tau}_K\right)+\theta_{2L}\left[\left(\hat{w}+\hat{\tau}\right)+\left(\hat{\tau}_l-\hat{\tau}_K\right)\right]+\theta_{2Z}\left[\hat{\tau}_Z-\left(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K\right)\right]\right\}\end{gathered}$$

$$\hat{P}_1-\hat{P}_2=\theta_{1L}\left[\left(\hat{w}-\hat{\tau}\right)+\left(\hat{\tau}_l-\hat{\tau}_K\right)\right]-\theta_{2L}\left[\left(\hat{w}+\hat{\tau}\right)+\left(\hat{\tau}_l-\hat{\tau}_K\right)\right]-\theta_{2Z}\left[\hat{\tau}_Z-\left(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K\right)\right]$$

Haciendo los arreglos necesarios a (B.3) se obtiene (10).
En cuanto a la tercera ecuación del sistema se tiene que si se sustrae la segunda ecuación de la primera en (6), se tiene que:

$$\hat{X}_1-\hat{X}_2=\theta_{1K}\hat{K}_1+\theta_{1L}\hat{L}_1-\left(\theta_{2K}\hat{K}_2+\theta_{2L}\hat{L}_2+\theta_{2Z}\hat{Z}\right) \tag{B.4}$$

Ahora reemplazando (3) y (4) en (B.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}&\hat{X}_1-\hat{X}_2=\theta_{1K}\left(\sigma_1\left[(\hat{w}-\hat{\tau})+(\hat{\tau}_1-\hat{\tau}_K)\right]+\hat{L}_1\right)+\theta_{1L}\hat{L}_1-\\&\left(\theta_{2K}\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{LZ})\hat{\tau}_Z+\hat{L}_2\right\}+\right.\\&\left.\theta_{2L}\hat{L}_2+\theta_{2Z}\left\{\hat{L}_2-\left[\theta_{2K}(\varepsilon_{LK}-\varepsilon_{ZK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{LL}-\varepsilon_{ZL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right]\right\}\right)\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}&\hat{X}_1-\hat{X}_2=\theta_{1K}\left(\sigma_1\left[(\hat{w}-\hat{\tau})+(\hat{\tau}_1-\hat{\tau}_K)\right]\right)+\theta_{1K}\hat{L}_1+\theta_{1K}\hat{L}_1-\\&\left(\theta_{2K}\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{zZ})\hat{\tau}_Z\right\}+\right.\\&\left.\theta_{2L}\hat{L}_2+\theta_{2Z}\hat{L}_2-\left\{\left[\theta_{2K}(\varepsilon_{LK}-\varepsilon_{ZK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{LL}-\varepsilon_{ZL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right]\right\}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\hat{X}_1-\hat{X}_2=\left(\hat{L}_1-\hat{L}_2\right)+\theta_{1K}\left(\sigma_1\left[(\hat{w}-\hat{\tau})+(\hat{\tau}_1-\hat{\tau}_K)\right]\right)\\&\theta_{2K}\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{zZ})\hat{\tau}_Z\right\}+\\&\left\{\left[\theta_{2K}(\varepsilon_{LK}-\varepsilon_{ZK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{LL}-\varepsilon_{ZL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right]\right\}\Big)\end{aligned}$$

Se puede obtener $\hat{L}_1=\hat{L}_2$, primero despejando las demandas de capital de (3) y (4)

$$\hat{K}_1=\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]+\hat{L}_1 \tag{B.6}$$

$$\hat{K}_2=\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{LZ})\hat{\tau}_Z+\hat{L}_Z$$

y luego reemplazando en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}&\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]+\hat{L}_1\right\}+\lambda_{K,2}\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\right.\\&\left.\sigma_{2K}(\varepsilon_{LK}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z+\hat{L}_2\right\}=0\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_{K,1}\hat{L}_1+\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+\lambda_{K,2}\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\right.\\&\left.\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}+\lambda_{K,2}\hat{L}_2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\hat{L}_1\lambda_{L,1}+\hat{L}_2\lambda_{L,2}=\lambda_{K,1}\hat{L}_1+\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+\lambda_{K,2}\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})\right.\\&\left.(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}+\lambda_{K,2}\hat{L}_2\end{aligned}$$

$$\lambda_{L,1}\hat{L}_1-\lambda_{K,1}\hat{L}_1+\lambda_{L,2}\hat{L}_2-\lambda_{K,2}\hat{L}_2=\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+$$
$$\lambda_{K,2}\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}$$

Hay que recordar el hecho que $\lambda_{L,1}+\lambda_{L,2}=1$ y $\lambda_{K,1}+\lambda_{K,2}=1$, luego

$$\lambda_{L,1}\hat{L}_1-\lambda_{K,1}\hat{L}_1+(1-\lambda_{L,1})\hat{L}_2-(1-\lambda_{K,1})\hat{L}_2=\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+$$
$$(1-\lambda_{K,1})\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\} \quad \text{(B.8)}$$

$$\lambda_{L,1}\hat{L}_1-\lambda_{K,1}\hat{L}_1+\hat{L}_2-\lambda_{L,1}\hat{L}_2-\hat{L}_2+\lambda_{K,1}\hat{L}_2=\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+$$
$$(1-\lambda_{K,1})\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}$$

$$(\lambda_{L,1}-\lambda_{K,1})(\hat{L}_1-\hat{L}_2)=\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+(1-\lambda_{K,1})$$
$$\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}$$

$$\hat{L}_1-\hat{L}_2=\frac{1}{\lambda_{L,1}-\lambda_{K,1}}\Big(\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+(1-\lambda_{K,1})$$
$$\left\{\sigma_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\sigma_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\sigma_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}\Big)$$

Reemplazando (B.8) en (B.5), se tiene:

$$(\lambda_{L,1}-\lambda_{K,1})(\hat{X}_1-\hat{X}_2)=\Big\{\Big(\lambda_{K,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+(1-\lambda_{K,1})$$
$$\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}\Big)\Big\}+$$
$$(\lambda_{L,1}-\lambda_{K,1})\Big[\theta_{1K}\Big(\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau}_l)-(\hat{\tau}_l+\hat{\tau}_K)\right]\Big]-\theta_{2K}\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\right. \quad \text{(B.9)}$$
$$\left.\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}+\Big\{\Big[\theta_{2K}(\varepsilon_{LK}-\varepsilon_{ZK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+$$
$$\theta_{2L}(\varepsilon_{LL}-\varepsilon_{ZL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)+\theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\Big]\Big\}\Big)$$

$$(\lambda_{L,1}-\lambda_{K,1})(\hat{X}_1-\hat{X}_2)=\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau})+(\hat{\tau}_l+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+\lambda_{L,1}\left\{\sigma_1\left[(\hat{w}+\hat{\tau})+(\hat{\tau}_l+\hat{\tau}_K)\right]\right\}+$$
$$\lambda_{L,1}\left\{\theta_{2K}(\varepsilon_{KK}-\varepsilon_{LK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{KL}-\varepsilon_{LL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)\theta_{2Z}(\varepsilon_{KZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\right\}+$$
$$(\lambda_{L,1}-\lambda_{K,1})\Big\{\Big[\theta_{2K}(\varepsilon_{LK}-\varepsilon_{ZK})(\hat{\tau}+\hat{\tau}_K)+\theta_{2L}(\varepsilon_{LL}-\varepsilon_{ZL})(\hat{w}+\hat{\tau}_l)\theta_{2Z}(\varepsilon_{LZ}-\varepsilon_{ZZ})\hat{\tau}_Z\Big]\Big\}$$

Otra vez, haciendo los arreglos necesarios se llega a (11)